ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DU TRANSPORT ET
DE LA LOGISTIQUE

INSTITUT SUPERIEUR D'ETUDES MARITIMES

Concours d'accès en 1ère année du cycle ingénieur (2022/2023)
Épreuve de Mathématiques, durée 1h

Questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
Barème : réponse correcte : 2 points    réponse fausse : -1 point    pas de réponse : 0 points.

1. Soit $P$ un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 11$ vérifiant les conditions :
$P(1) = 1!, \quad P'(1) = 2!, \quad P''(1) = 3!, \dots, \quad P^{(10)}(1) = 11!.$
Choisir la bonne réponse :

A) Un tel polynôme $P$ n'existe pas.
B) Il existe un unique polynôme $P$ vérifiant ces conditions.
C) Il existe une infinité de polynômes $P$ vérifiant ces conditions.
D) Si $P$ est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors $P(X) = 1 + 2(X-1) + 3(X-1)^2 + \cdots + 11(X-1)^{10} + 12(X-1)^{11}$.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Choisir l'assertion incorrecte :

A) Le rang de $A$ est 2.
B) A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.
C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A + A^{-1})^n = (2^n \cos^n x) I$, où $I$ est la matrice identité.
D) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

3. Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Choisir la bonne réponse :

A) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) \neq 0$.
B) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\pi}{2}$.
C) La fonction $f$ est paire.
D) $f(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

4. Soit $f(x) = x^x (1-x)^{1-x}$. On notera $D_f$ le domaine de définition de $f$. Choisir l'assertion incorrecte :

A) $D_f = ]0,1[$.
B) L'ensemble des valeurs de $f$ est $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
C) $f$ est croissante $]0,1[$.
D) $f$ est une bijection de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

5. On pose $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$. Choisir la bonne réponse :

$\boxed{A}$ $I = J$.
$\boxed{B}$ $I = \frac{1}{J}$.
$\boxed{C}$ $I = \frac{1}{2}\ln(3)$.
$\boxed{D}$ $J = \ln\sqrt{3}$.

6. Soit $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{\sqrt{1+2x}-1}$. On note par DL, développement limité. Choisir la bonne réponse :

$\boxed{A}$ Le DL à l'ordre 2 en 0 de : $\ln\left(1+x+x^2\right) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.
$\boxed{B}$ Le DL à l'ordre 2 en 0 de : $\sqrt{1+2x} - 1 = x - \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.
$\boxed{C}$ Le DL à l'ordre 2 en 0 de : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.
$\boxed{D}$ Le DL à l'ordre 3 en 0 de : $[xf(x)] = 1 + x - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^2\right)$.

7. On considère l'équation différentielle $(E)$ : $\sqrt{1+x^2}y' - xy = x$. Choisir la bonne réponse :

$\boxed{A}$ La solution générale de l'équation homogène est : $y = ke^{1+x^2}, k \in \mathbb{R}$.
$\boxed{B}$ La solution générale de $(E)$ est : $y = -1 + ke^{\sqrt{1+x^2}}, k \in \mathbb{R}$.
$\boxed{C}$ $y_0 = 1$ est une solution particulière de $(E)$.
$\boxed{D}$ $(E)$ admet une unique solution vérifiant $y'(0) = 0$.

8. Soit $I = \iint \left(x^2+y^2\right) dx\, dy$. Choisir la bonne réponse :

$\boxed{A}$ Si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 3 \text{ et } y \geq 0\right\}$ alors $I = \frac{2\pi}{15}$.
$\boxed{B}$ Si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 3 \text{ et } y \geq 0\right\}$ alors $I = \frac{35\pi}{16}$.
$\boxed{C}$ Si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ et } -y \leq x \leq y\right\}$ alors $I = \frac{32\pi}{3}$.
$\boxed{D}$ Si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ et } -y \leq x \leq y\right\}$ alors $I = \frac{16}{3}$.

9. Soit $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$. Choisir la bonne réponse :

$\boxed{A}$ $(0,0)$ et $(-4,2)$ sont les points critiques de $f$.
$\boxed{B}$ La matrice Hessienne de $f$ en $(0,0)$ est définie positive.
$\boxed{C}$ $f$ admet un maximum en $(-4,2)$.
$\boxed{D}$ $(0,0)$ est un point-selle.

10. Parmi les intégrales impropres suivantes, laquelle est divergente ?

$\boxed{A}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
$\boxed{B}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx$.
$\boxed{C}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t} dt$.
$\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$.