

Exercice 1

On considère la série de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de terme général :

$$u_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

1°) (a) Montrer que la série de terme général $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1)$ est convergente et déterminer sa somme.

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k u_k(1) = 0$.

(c) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, où $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k(1)$ converge et donner sa somme.

2°) (a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$?

3°) (a) Trouver une relation simple entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

(b) Trouver un équivalent de S aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

4°) Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $G(y) = \int_0^1 t^{y-1} e^{-t} dt$.

(a) Quel est le domaine de définition de G ?

(b) Prouver que G est convexe sur son domaine de définition.

5°) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, établir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e}{(x+n)n!}.$$

(b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \int_0^1 t^{x-1} e^{1-t} dt.$$

Exercice 2

Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°) (a) Déterminer les nombres réels λ tels que $M - \lambda Id_4$ ne soit pas inversible. (Id_4 désigne la matrice identité d'ordre 4).

(b) Pour chacune de ces valeurs λ , déterminer les vecteurs X de $\mathbb{R}^4$, tels que $MX = \lambda X$.

2°) Soient H et H' deux matrices carrées d'ordre 4, écrites sous la forme de blocs :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix} \text{ et } H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix} \text{ avec } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C + AC' & AA' \end{pmatrix}.$

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4°) On considère la matrice W définie par : $W = V - 2Id_3$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3.

(a) Calculer W^2 et W^3 .

(b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W^n .

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter V^n .

5°) (a) Soit X_1 l'unique vecteur de $\mathbb{R}^4$, telle que $MX_1 = X_1$ et dont la première composante vaut 1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n X_1$.

(b) On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de a_n , b_n et c_n en fonction de n .