Université Mohammed V de Rabat

École Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes

Concours d'Accès en Première Année (Filières DUT)

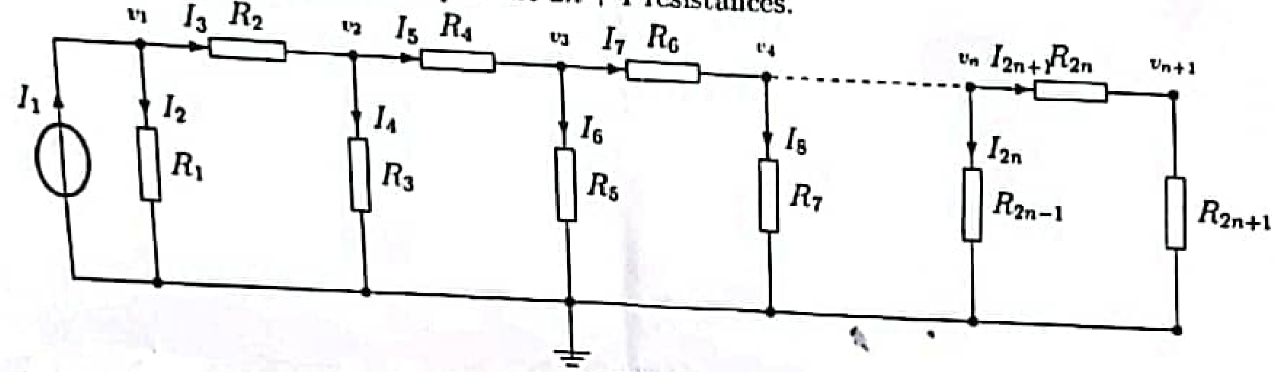
Epreuve de Physique

Date: Vendredi 12 Juillet 2024

Durée: 2h

Exercice 1

On considère le circuit suivant composé de $2n+1$ résistances.



1. En utilisant la première loi de Kirchhoff, montrer que

$$\mathbf{A}^{(n+1)}\mathbf{v}^{(n+1)} = \mathbf{I}^{(n+1)},$$

avec (1)

- $\mathbf{v}^{(n+1)} = (v_1, v_2, \cdots, v_{n+1})^T$: vecteur des tensions nodales;
- $\mathbf{I}^{(n+1)} = (I_1, 0, \cdots, 0, 0)^T$: un vecteur des $n+1$ éléments;
- $\mathbf{A}^{(n+1)}$ est une matrice tridiagonale carrée, de $n+1$ lignes de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

où les coefficients $\{a_{i,i}\}_{1\le i\le n+1}$ et $\{a_{i,i+1}\}_{1\le i\le n}$ sont à exprimer en fonction des résistances $\{R_j\}_j$.

2. **Calcul itératif de l'impédance**

   (a) Exprimer la relation entre v_{i+1} et v_i pour $i = n..1$;

   (b) Donner la relation entre v_1 et I_1;

   (c) Déduire l'impédance équivalente du circuit;

(d) Ecrire l'algorithme de la fonction itérative **ImpEquivIterative(R, n)** permettant de renvoyer l'impédance équivalente du circuit.

3. **Calcul récursif de l'impédance**

   Soit $\{Z_i\}_{2\leq i\leq n+1}$ l'impédance équivalente du circuit formé de $\left\{R_{2(n-i)+3},\cdots R_{2n+1}\right\}$ et Z_1 l'impédance équivalente du circuit formé de $\{R_{2n-1}, R_{2n}, R_{2n+1}\}$. On s'intéresse à calculer, d'une manière récursive, l'impédance équivalente $Z_{n+1} = \{R_1, \cdots R_{2n+1}\}$ du circuit considéré.

   (a) Trouver la relation de récurrence entre Z_{i+1} et Z_i pour $1 \leq i \leq n+1$;

   (b) Exprimer Z_1;

   (c) Ecrire l'algorithme de la fonction recursive **ImpEquivRecursive(R, n)** permettant renvoyer l'impédance équivalente du circuit formé de vecteur de résitances **R** de dimension $2n+1$.

Exercice 2

On désire réaliser un multiplicateur 2 bits par 2 bits et 4 bits par 4 bits.

Multiplicateur 2 bits par 2 bits

Soit $\mathbf{a} = a_1a_0$ et $\mathbf{b} = b_1b_0$ deux éléments codés sur 2 bits, et $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = c_3c_2c_1c_0$ leur produit codé sur 4 bits,

1. Etablir la table de vérité correspondant au produit $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$;
2. Donner les équations de sortie, i.e., $\{c_i\}_{i\leq 3}$ en fonction de a_j et $b_j, j = 0, 1$;
3. Exprimer $\mathbf{c}$ sous forme d'une somme d'éléments multiplicatifs $\{2^i\}_{0\leq i\leq 3}$, incluant a_j, b_j et les deux retenus R_1et R_2 correspondant aux deuxième et premier bits de poids fort de $\mathbf{c}$, respectivement;
4. Réaliser un tel multiplicateur 2 bits par 2 bits à l'aide de demi-additionneurs et de multiplicateurs 1 bit par 1 bit.

Multiplicateur 4 bits par 4 bits

On considère deux éléments $\mathbf{a} = \underbrace{a_3a_2}_{\triangleq \mathbf{a}_F}\underbrace{a_1a_0}_{\triangleq \mathbf{a}_f}$ et $\mathbf{b} = \underbrace{b_3b_2}_{\triangleq \mathbf{b}_F}\underbrace{b_1b_0}_{\triangleq \mathbf{b}_f}$ sur 4 bits et soit $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ leur produit codé sur 8 bits. Les deux indices F et f réfèrent aux poids fort et faible, respectivement.

On s'interèsse à réaliser un circuit multiplicateur 4 bits par 4 bits.

1. Vérifier que $\mathbf{c}$ peut s'exprimer sous forme d'une somme décimale

$$\mathbf{c} = (e_3 + R_2)x^3 + (e_2 + R_1)x^2 + e_1x + e_0$$

   où

   - e_i peuvent s'écrire sous forme d'une combinaison de poids fort et faible de produit de $\mathbf{a}_{\chi_1}$ et $\mathbf{b}_{\chi_2}$ avec $\{\chi_1, \chi_2\} \in \{f, F\}^2$
   - x est une base à identifier

1. Déduire le circuit multiplicateur 4 bits par 4 bits en utilisant des
   - Multiplicateurs 2 bits par 2 bits;
   - Additionneurs 2 bits par 2 bits;
2. Simuler la multiplication $\mathbf{a} = 0110$ et $\mathbf{b} = 1101$.