ENSIAS

Université Mohammed V de Rabat

CONCOURS D'ACCÈS À L'ENSIAS
POUR LES CANDIDATS TITULAIRES DU DEUG

Epreuve de Mathématique

Durée 2 heures

Partie 1 :

On appelle θ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, paire et périodique de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \theta(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ \theta(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

1.1. Tracer les graphes des fonctions θ et θ_1, dérivée de la fonction θ.

1.2. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction θ_1.

Etudier sa convergence.

Partie 2 :

Ce problème consiste à chercher les fonctions U de classe C^0 *sur* $\Omega=[0,\pi] \times IR_+$ et C^2 sur $[0,\pi] \times IR^*_+$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}^*_+, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) & (1) \\ \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad U(0,t) = U(\pi,t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0,\pi], \quad \lim_{t \to +\infty} U(x,t) = 0 & (3) \\ \forall x \in [0,\pi], \quad U(x,0) = \Phi(x) & (4) \end{cases}$$

Une fonction U vérifiant les quatre relations (1), (2), (3) et (4) est dite solution du problème (P).

On se propose de chercher des solutions de l'équation différentielle (1) sous la forme de fonctions V définies sur Ω par :

$$\forall (x,t) \in \Omega,\ V(x,t) = g(x).h(t)$$

où g est une fonction réelle de classe C^2 sur $[0,\pi]$ et h une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$.

Question 1.

1.1. Montrer que si les fonctions g et h sont solutions des équations différentielles :

$$\begin{cases} g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$$

où μ est un réel quelconque, alors la fonction $V : (x,t) \to V(x,t) = g(x).h(t)$ vérifie (1).

1.2. Trouver toutes les solutions des équations différentielles précédentes.

1.3. On prend $\mu = -k^2$, $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer une suite de fonctions $(V_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$:

$$\begin{array}{rcl} V_k : \quad \Omega & \to & \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & V_k(x,t) = g_k(x).h_k(t) \end{array}$$

vérifiant (1), (2) et (3).

Question 2.

Soit : $$\begin{array}{rcl} H : \quad \Omega & \to & \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & H(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin(kx) e^{-k^2 t} \end{array}$$

et pour $k \in \mathbf{N}^*$, $$\begin{array}{rcl} R_k : \quad \Omega & \to & \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & R_k(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}. \end{array}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ pour que la fonction H soit solution du problème (P).

2.1. A l'aide de la relation (4), déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$.

2.2. Montrer qu'alors, la fonction H est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t avec :

$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x,t)$$

et $$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x,t).$$

Question 3.

Trouver une solution au problème (P).

Bonne chance !