Université Mohammed V de Rabat

Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes

Concours DEUG 2017-18

Epreuve de Mathématiques

Jeudi 13/7/2017 à 9h00

Durée 3h

ENSIAS

Rabat : 13/07/2016

Concours DEUG

Epreuve de Physique

I- Lancement de points matériels

On considère le plan *Oxy* d'un repère Galiléen *R(O,x,y,z)* où *ox* est l'axe horizontal et *Oy* est l'axe vertical. A l'instant initial, on lance de l'origine O des points matériels M_i de même masse *m* sachant que leurs vitesses initiales possèdent le même module $\|\vec{V}_0\|$. Les vecteurs vitesses initiales $\vec{V}_{0,i}$ sont tous contenus dans le plan *xOy* et ayant des orientations différentes. Ces points sont soumis, outre leurs poids, à des forces de frottement fluides $-f\vec{V}$. Le coefficient de frottement *f* est le même pour tous les points.

1- Déterminer l'équation horaire $\overrightarrow{OM}(t)$ d'un point matériel M_i et montrer qu' à tout instant *t* tous les points M_i sont situés sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2- On suppose que f=0 et on ne considère qu'un point matériel.

a- Que deviennent les équations du mouvement. En déduire l'équation de la trajectoire.

b- Pour quelle angle de départ θ_i la portée du tir est elle maximale ? Quelle est cette distance.

c- Déterminer la hauteur maximale que peut atteindre le point matériel M.

d- A quelle condition un projectile peut il atteindre un point de coordonnées (x_0, y_0) en suivant deux parcours différents. Donner l'équation de la courbe limitant l'espace à l'intérieur duquel doit se trouver une cible pour qu'un projectile de vitesse initiale $\vec{V}_0$ puisse l'atteindre.

II- Force électromotrice (f.e.m) d'un circuit

On considère dans le vide un champ électrique fonction du point et du temps de la forme:

$$\vec{E}=E_0\cos(\omega t-kx)\vec{e}_z \qquad \text{avec} \qquad k = 2\pi / \lambda = \omega / c \qquad \text{et c: vitesse de la lumière dans le vide.}$$

1°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ Sachant que les constantes d'intégration sont nulles. L'ensemble $(\vec{E},\vec{B})$ constitue une onde électromagnétique qui se propage suivant ox.

2°) Un cadre rectangulaire de côté a et b formé d'un fil conducteur de résistance R et de self L est placé dans le plan *xoz*, les côtés étant parallèles et perpendiculaires à *ox* et *oz*. On suppose que les dimensions du cadre sont très petites devant la longueur d'onde λ. Le cadre a une petite coupure entre les points M et N (Fig. 1).

a - Calculer de deux manières différentes la valeur instantanée de la f.e.m d'induction produite par l'onde dans ce cadre entre les points M et N

b - Exprimer la d.d.p entre M et N dans le cas ou le circuit est ouvert et dans le cas ou les points M et N sont connectés à une charge d'impédance Z.

3°) Maintenant le cadre est placé dans un plan parallèle au plan *yoz* (Fig. 2) la coupure M-N étant parallèle à *oz*. Calculer la f.e.m instantanée d'induction.

LK=PQ=a KQ=LP=b

NK=QM=b/2-d

a ; b ; d constantes

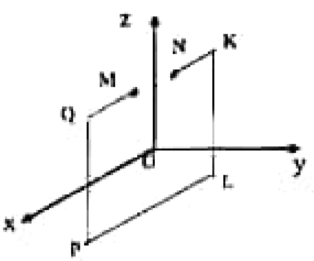

Fig 1

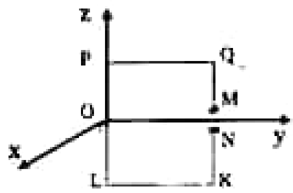

Fig 2

Problème : Dans tout le problème, I designe l'intervalle $]-1,1[$.
On considère l'equation différentielle :

$$\left(1-x^{2}\right) y^{\prime}-x y=f(x) \qquad (\varepsilon_f)$$

où f désigne une fonction réelle de classe C^{∞} sur I ; on rappelle qu'une solution φ de cette équation est une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I, \left(1-x^{2}\right) \varphi^{\prime}(x)-x \varphi(x)=f(x)$.

Partie I

On considère la suite $(\alpha_i)_{i\in N}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i=\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin u)^{i} \, du.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2}, pour tout entier naturel i.
2. En déduire que :

$$\alpha_i=\begin{cases}1 & \text{si } i=0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \frac{(i-1)(i-3)\ldots 1}{i(i-2)\ldots 2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.}\end{cases}$$

Partie II

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de (ε_f), définie sur I et telle que $\varphi(0)=y_0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.
2. Montrer que toutes les solutions de (ε_f) sont de classe C^{∞} sur I.
3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$\left(1-x^{2}\right) y^{\prime}-x y=0 \qquad (\varepsilon_0)$$

   (b) Etant donné un réel y_0, démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle (ε_f) telle que $\varphi(0)=y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I, \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\left(\int_{0}^{x} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^{2}}} dt+y_0\right).$$

   (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$\left(1-x^{2}\right) y^{\prime}-x y=1 \qquad (\varepsilon_1)$$

   déterminer les solutions sur I.

Partie III

On considère maintenant que f est définie par une série entière de rayon de convergence $R>1$:

$$\forall x \in]-R, R[, f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{k}.$$

1. (a) Montrer que les solutions de (ε_f) sur $]-1,1[$ sont développables en série entière, avec un rayon de convergence au moins égal à 1.
   (b) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ l'une de ces solutions ;
      i. Exprimer, pour $k \geq 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k.

ii. En déduire, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$, $\frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$ et $\frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$ (on utilisera la question 1. de la Partie I).

iii. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0, des α_{2k} et des b_{2k-1} avec $1 \leq k \leq p$.

iv. De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $(2k+1)\, a_{2k+1}\alpha_{2k}$, $(2k-1)\, a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)}$ et $b_{2k}\alpha_{2k}$.

v. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des α_{2k} et des b_{2k}, avec $1 \leq k \leq p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1, 1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

(a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

(b) Montrer que φ est une solution de (ε_f) sur $]-1, 1[$.

(c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

i. Soit $x \in]-1, 1[$ et soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u))\, du.$$

ii. Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in \overset{0}{]-\pi}, \pi[\ F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u))\, du.$$

Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi, \pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F'. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

iii. Conclure.

__Exercice :__ Recherche d'une racine réelle x du polynôme P.
On considère deux nombres réels a et b ($a < b$) tels que $P(a)\,P(b) \leq 0$.
On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $(a_0) = a$, $(b_0) = b$, puis par :

- $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ si $P(a_n)\, P\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \leq 0$..
- $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$ si $P(a_n)\, P\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) > 0$.

1. Etablir que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Etablir, pour tout entier naturel n, qu'on a $P(a_n)\, P(b_n) \leq 0$.
   En déduire que la limite commune x des suites (a_n) et (b_n) est racine de P.
3. Ecrire un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de x d'amplitude $h \leq \frac{b-a}{2^n}$.