UNIVERSITE HASSAN II de CASABLANCA
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

Concours d'Entrée
en
première année de l'ENSEM

Pour les titulaire du
DEUG MP et MI ou EQUIVALENT
2017 - 2018

ENSEM

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Le 11 juillet 2017
Durée : 3 heures

Attention :

- **Les deux parties Analyse et algèbre doivent être rédigées sur deux copies séparées.**
- **Il sera tenu compte de la présentation.**
- **L'usage de la calculatrice est strictement interdit.**
- **Éteindre le téléphone portable.**

Algèbre :

Exercice 1 :

Soient les matrices suivantes :

A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconque et soit M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^k pour tout k∈IN.
2. Diagonaliser la matrice M.
3. Exprimer A en fonction des puissances de M. en déduire la diagonalisation de A.

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par $P_n(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$, $x\in IR$.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n, ∀k≥2n+1.
3. Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
4. Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout k∈{0,...,n-1}.
5. Soit k un entier tel que n≤k≤2n.
   5.1. Montre que
   $\forall x\in IR,\ P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}$
   On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k–ième d'un produit.
   5.2. En déduire les valeurs de de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.
   5.3. Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Problème :

Soit IR^n l'espace vectoriel réel, muni de sa base canonique et du produit scalaire euclidien défini par :

∀ x=(r_1, r_2, ..., r_n) et ∀y=(s_1, s_2, ..., s_n), $(x|y)=\sum_{i=1}^{n} r_i s_i$.

Tout sous espace de dimension n-1 est appelé hyperplan.

On appelle orthogonal de x, l'hyperplan $x^{\perp}$ constitué des vecteurs orthogonaux à x.

Soit f∈L(IR^n) un endomorphisme quelconque de IR^n et ${}^t f$ le transposé de f.

Les vecteurs propres sont tous non nuls et seules les valeurs propres réelles éventuelles d'un endomorphisme f sont prises en considération.

1) Montrer que f et ${}^t f$ ont même polynôme caractéristique.
2) Montrer que les sous espaces propres de f et de ${}^t f$ relatifs à une valeur propre commune à ces deux endomorphismes ont même dimension.
3) Montrer que les orthogonaux des vecteurs propre de ${}^t f$ sont les hyperplans stables par f.
4) Montrer que si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ et si y est un vecteur propre de ${}^t f$ associé à une valeur propre μ≠λ, alors x et y sont orthogonaux.
5) Montrer par un exemple qu'un vecteur propre x de f et un vecteur propre y de ${}^t f$ peuvent être orthogonaux même s'ils sont associés à la même valeur propre.
6) Soit λ une valeur propre de f dont l'ordre de multiplicité est égal à la dimension du sous-espace propre E qui lui est associé. Montrer que les vecteurs propres de ${}^t f$ associés à λ ne sont pas orthogonaux au sous-espace E.

CONCOURS DEUG

MATHÉMATIQUES - ANALYSE - Année 2017

Durée : 1H30

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 2 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes de leurs affirmations.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,
   $$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

   (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

   (d) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geq 1$,
   $$\frac{n-1}{n} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

   (e) Justifier alors que
   $$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. Déterminer une expression de I_{2n} en fonction de n et justifier
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi}I_{2n}.$$

1 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}\frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x \neq 1$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Etudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.

3. Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

En déduire que f est dérivable au point 1 et déterminer $f'(1)$.

Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < (x-1)$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.

5. Donner la représentation graphique de la fonction f .

6. Soit a un réel supérieur à 1.

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de réels vérifiant $x_0 = a$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$

   (b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite ℓ que l'on précisera.

7. On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $|f(x_n) - \ell| \leq \frac{1}{3}|x_n - \ell|$ pour tout $n \geq n_0$

   (b) En déduire que la suite $(x_n - \ell)_{n\geq 0}$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_{n\geq 0}$