EPREUVE D'ÉLECTRICITE

Durée : 1 h 30, sans documents

Note préliminaire : **L'étudiant doit rédiger cette épreuve sur une copie séparée. L'épreuve contient 2 parties indépendantes A, et B.**

A. *ELECTROMAGNETISME :*

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$). Soit $\vec{g} = -g\ \vec{e}_z$, le champ de pesanteur (avec $g > 0$).

Deux rails métalliques parallèles et distants de ℓ, parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice **CD** rectiligne, de résistance R. Ces conducteurs constituent un ensemble rigide et immobile.

Afin de fermer le circuit, une barre métallique, de masse m, parfaitement conductrice, est posée sur les rails, orthogonalement à ceux-ci. Soient **A** et **B** les points de contact entre la barre et les rails. Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_o = B_o\ \vec{e}_z$, avec $B_o > 0$.

I. Cadre horizontal dans un champ magnétique uniforme et constant

Le circuit **ABCD** est situé dans un plan horizontal et les rails sont maintenus parallèles à l'axe Ox. La barre est animée d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\ \vec{e}_x$ (avec $v > 0$) (figure 1).

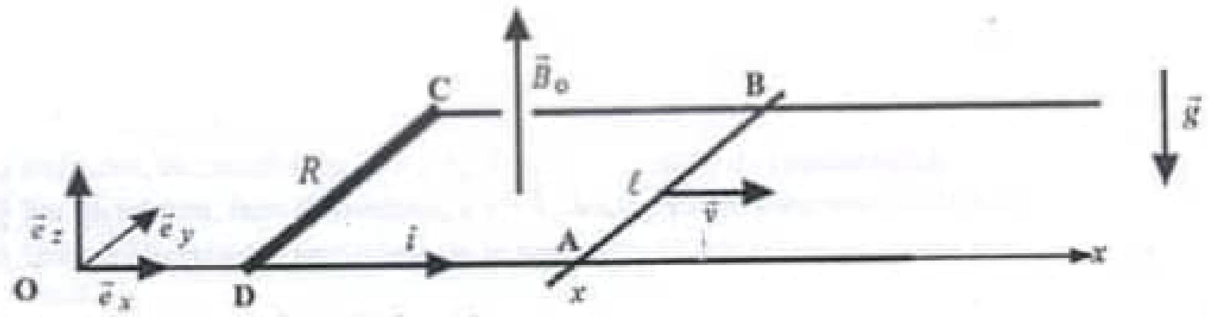


Figure 1

1) La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre **ABCD**.
2) Montrer que, dans la barre, les porteurs de charge sont soumis à l'action d'un champ électromoteur $\vec{E}_m$. Donner l'expression vectorielle de ce champ $\vec{E}_m$.
3) Prendre en compte l'orientation indiquée sur la figure (1) et préciser le signe du courant i induit dans le circuit **ABCD**.
4) Exprimer, en fonction de R, v, B_o et ℓ, l'intensité du courant i.
5) Ce courant induit s'accompagne de forces dites « de Laplace » appliquées à toutes les portions du circuit. Recopier la figure (1) en précisant la direction et le sens de la résultante $\vec{F}$ des forces d'induction appliquées à la barre **AB**.
6) A l'instant initial $t = 0$, la barre est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_o = v_o\ \vec{e}_x$ (avec $v_o > 0$). Déterminer l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}(t)$ au temps t.
7) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $v(t)$.
8) Une modification de la valeur de la résistance R peut-elle avoir une influence sur le mouvement de la barre ? Justifier.

II. Cadre incliné dans un champ magnétique uniforme et constant

Le cadre plan **ABCD** est maintenant incliné d'un angle α (constant) par rapport au plan horizontal. Les rails sont parallèles à l'axe Dx' (orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_{x'}$) et la tige **CD** est maintenue parallèle à l'axe Oy (orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_y$). La barre peut toujours effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails (figure 2).

A l'instant initial $t = 0$, la barre est abandonnée sans vitesse initiale. Soit $\vec{v}' = v' \vec{e}_{x'}$, sa vitesse de translation au temps t.

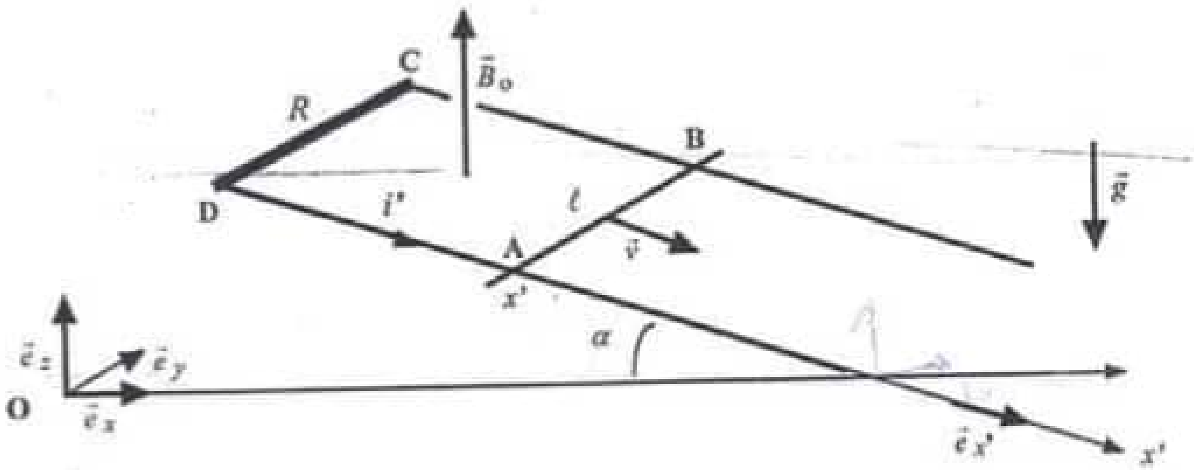


Figure 2

1) La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x'$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ' du champ magnétique à travers le cadre **ABCD**.
2) Exprimer, en fonction de R, v', B_o, ℓ et α, l'intensité du courant induit i'.
3) Sur un schéma, faire l'inventaire, à $t > 0$, des forces qui s'exercent sur la barre.
4) Donner l'expression vectorielle de la résultante $\vec{F}'$ des forces d'induction qui s'exercent sur la barre.
5) Établir l'équation différentielle liant la vitesse algébrique v' au temps t.
6) En déduire l'expression de $v'(t)$.
7) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $v'(t)$.

ETUDE DU MOUVEMENT D'UNE TIGE DANS UN PLAN

Documents Non Autorisé

- Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ) on désigne par $\vec{g}=g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur.

- Le solide **(S)** est un pendule simple constitué d'une tige rectiligne **OA**, homogène, de longueur **l**, d'épaisseur négligeable, de masse **m** et de centre de gravité **G**.

Le mouvement du solide **(S)** est un mouvement dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$, la liaison entre le bâti (Σ) et le solide **(S)** est une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ parfaite.

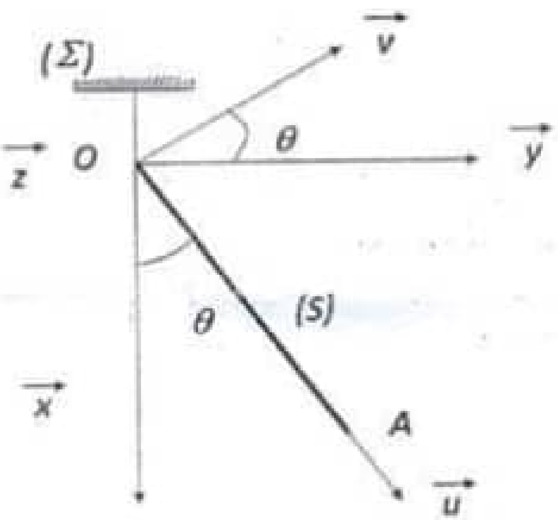
-on considère le repère lié au solide $R_s(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$.

On pose Soit $\theta=(\vec{x},\vec{u})=(\vec{y},\vec{v})$

Questions

A--**Etude cinématique (6 points)**

1-Déterminer la position du centre de gravité $\overrightarrow{OG}$.



2- a-Calculer la vitesse $\vec{V}(G/R)$

b-Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(G/R)$

3-Etude cinétique (8 points)

a-Déterminer la matrice d'inertie de la tige en **G** dans base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$.

b-Déterminer la résultante cinétique.

c-Déterminer le moment cinétique en **G**, en déduire le moment cinétique en **O**.

d-Déterminer l'énergie cinétique $E_c(S/R)$.

4-Etude Dynamique (6 points)

a- Déterminer la résultante dynamique.

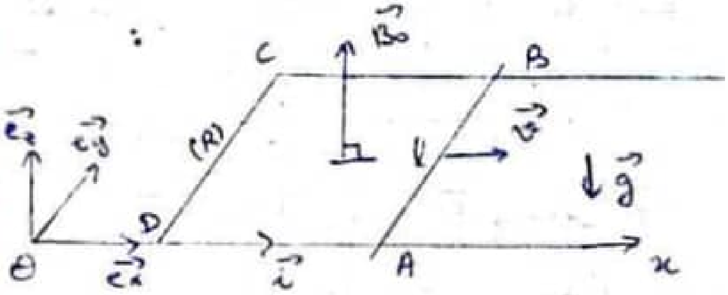
b-Déterminer le moment dynamique en **G** , en déduire le moment dynamique en **O**.

c-Déterminer le torseur des actions extérieures appliquées sur (S) en **O**.

d- Ecrire les équations de la dynamique pour le solide **(S)**.

ENSEM Physique 2012/2013

- Electricité : (I)



(1) - $d\phi = \vec{B_0}\,\vec{dS} = B_0\,dS\,\underbrace{\cos(\vec{B_0}, \vec{dS})}_{=1}$

$d\phi = B_0\,dS = B_0\,\ell\,dx.$

$dx = v\,dt \to d\phi = B_0 \ell v\,dt$

$\to \phi = \int d\phi = \int_{t_0}^{t} B_0 \ell v\,dt$

le champ electromagnetique uniforme et constante $B_0 > 0$

$\to \phi / B_0 \ell$ mais est ce que v depend de t ?? il faut mieux faire :

$\phi = \int B_0 \ell\,dx$, $x \in [x_D, x_A]$

$\phi = B_0 \ell [x]_{x_D}^{x_A} = B_0 \ell (x_A - x_D)$

le point D reperé par son absice x_D et A repère par x_A

$x_A - x_D = x$

$\to \boxed{\phi = B_0 \ell x}$

- le flux du champ magnétique à travers le cadre ABCD

(2) les charges portés dans la barre AB soumis à l'action d'un champ electromoteur $\vec{E_m}$ à pour expression

$\vec{E_m} = \vec{V} \wedge \vec{B_0}$ on peut ecrire

$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ / $\vec{V_1}$: vitesse des charges par rapport à un repère lié au circuit

$\vec{V_2}$: vitesse d'entrainement

(3) mais $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = v\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_z$
$= -B_0 v \vec{e}_y$

on a $B_0 > 0$ et $v \geq 0 \Rightarrow$ ~~E_m~~ $\vec{E}_m \geq 0$

$E_m = -B_0 v \leq 0$

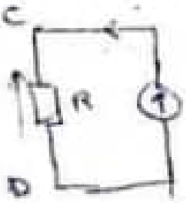
le sens de courant orienté par $\vec{e}_x$

- le champ $\vec{E}_m$ générant $\vec{i}$.

(4) d'après loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B_0 v \ell\, dt}{dt} = -B_0 v \ell$$

et on modélise le circuit par



$\Rightarrow e = Ri$

$\Rightarrow i = \frac{|e|}{R}$

$$\boxed{i = \frac{\cancel{+}B_0 v \ell \cancel{+}}{R} = \frac{-B_0 v \ell}{R}}$$

(5) : la force de Laplace au barre a pour expression

$$\vec{F}_L = \int i\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = \int i\, dl\, B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\vec{F}_L = \left(\int_\ell I\, dl\, B_0\right)\vec{e}_x = I \ell B_0 \vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{F}_L = I \ell B_0 \vec{e}_x}$$

(6) Appliquons le PFD $R(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$m\left.\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|_R = \vec{F} + \vec{P} = -mg\,\vec{e}_z + I\ell B_0 \vec{e}_x$$

projetant les équation onc :

$$m\left.\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|_R = m\frac{dv_x(t)}{dt} = I\ell B_0 \qquad i = -\frac{B_0 v \ell}{R}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{I\ell B_0}{m} = \frac{-\ell B_0}{m}\,\frac{B_0 v \ell}{R}$$

$\Rightarrow$ ~~$v(t)$~~ $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{B_0^2 \ell^2 v(t)}{mR}$

$\Rightarrow \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{mR}dt$

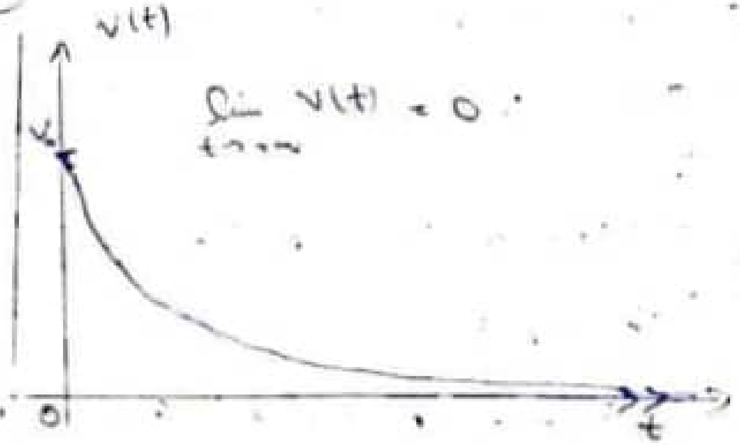
$\Rightarrow v(t) = A\exp\left(-\frac{B_0^2\ell^2}{mR}t\right)$

à $t = 0$ $\quad v(t=0) = v_0 > 0$

$\Rightarrow v(t=0) = A = v_0$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{B_0^2\ell^2}{mR}t\right)} \quad \forall t \geq 0$$

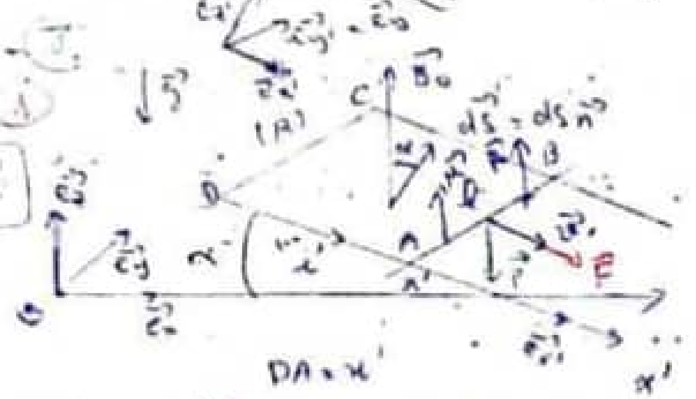
(7)



(8) - une augmentation de la valeur de R correspondant à une diminution de $v(t)$ $\forall t \geq 0$ autrement dit si $R\uparrow$ $v(t)\downarrow$

- J.

(1)



à $t = 0$ la barre est abandonnée sans vitesse initiale. $\vec{v} = v\vec{e}_x'$ sa vitesse de translation au temps t : le flux élémentaire du champ $\vec{B}_0$ à travers dS est

$d\phi = \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0\, dS \cos\alpha$

$d\phi = B_0 \cos\alpha \, l \, dx$ $\quad x \in [x_0, x_0 + x']$

l'abscie de A dans le repère $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

$\phi = B_0 \cos\alpha \, l [x]_{x_0}^{x_0 + x'} = B_0 l \cos\alpha \, x'$

$\phi = \iint \vec{B_0} \vec{S} = B_0 l \cos\alpha \, x'$

ϕ le flux total du $\vec{B_0}$ à travers ABCD

(2) on modélise notre circuit par

$e = \frac{-d\phi}{dt}$ on utilisant la loi de Faraday pour déterminer la fem généré par le champ $\vec{B_0}$

$$e' = \frac{-d\phi}{dt} = \frac{-B_0 l \cos\alpha \, dx'}{dt}$$

$$e = -B_0 l \cos\alpha \, v'(t)$$

Rdurance $v = \frac{x}{t}$ $\; dx = v \, dt$

$$\boxed{e' = -B_0 l v'(t) \cos\alpha}$$

et d'après la loi d'Ohm dans notre circuit. $i' = \frac{e'}{R}$

$$\boxed{i' = \frac{-B_0 l v'(t) \cos\alpha}{R} = \frac{-B_0 l v'(t) \cos\alpha}{R}}$$

(3) les forces appliqué en AB sont la force de Laplace et le pesanteur la Reaction des rails CB et DA en AB : voir le premier figure on (1)

(4) $\vec{F'} = \int i' \vec{dl} \wedge \vec{B_0} = \int i' \, dl \, B_0 \sin(\frac{\pi}{2}) \vec{e_x}$

$\vec{dl} \wedge \vec{B_0} = dl \, \vec{e_y} \wedge B_0 \vec{e_z} = B_0 \, dl \, \vec{e_x}$

$\vec{F'} = \left(\int i' B_0 \, dl \right) \vec{e_x} = i' B_0 l \, \vec{e_x}$

$\vec{F'}$ force de Laplace appliqué ~~sur~~ à la barre AB.

(5) en appliquant le PFD sur AB :

$$m \frac{d\vec{v'}(t)}{dt} \Big|_R = \vec{F'} + \vec{P} + \vec{R}$$

$$m \frac{d\vec{v'}(t)}{dt} \Big|_R = i' B_0 l \vec{e_x} - mg \vec{e_z} + R \vec{e_z}$$

$$m \left(\frac{d\vec{v'}(t)}{dt} \cos(\alpha) \vec{e_x} + \frac{d\vec{v'}(t)}{dt} \sin\alpha \, \vec{e_z} \right)$$

$$= i' B_0 l \vec{e_x} - mg \vec{e_z} + R \vec{e_z}$$

$$(1) \begin{cases} m \frac{dv'(t)}{dt} \cos\alpha = i' B_0 l + R \sin\alpha \\ m \frac{dv'(t)}{dt} \sin(\alpha) = -mg + R \cos\alpha \end{cases} (2)$$

$$i'(t) = \frac{-B_0 l v'(t) \cos\alpha}{R}$$

$\Rightarrow (1) \Rightarrow$

$$m \frac{dv'(t)}{dt} \cos\alpha = \frac{B_0^2 l^2 v'(t) \cos\alpha}{R} + R \sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{dv'(t)}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2 v'(t)}{mR} + \frac{R}{m} tg(\alpha)}$$

(6) on va résoudre cette équation différentielle ona : sans second membre

$$v'(t) = A \exp\left(\frac{-B_0^2 l^2}{mR} t \right) m$$

A est une constante à déterminer par des conditions initiales, cherchons la solution particulière :

$$v'_p(t) = A(t) \exp\left(\frac{-B_0^2 l^2 t}{mR} \right)$$

$$\frac{dv'_p(t)}{dt} = A'(t) \exp(Kt) + A(t) (+K) e^{Kt}$$

posons $K = \frac{-B_0^2 l^2}{mR}$

$$\frac{dv'_p(t)}{dt} - K v'_p(t) = A'(t) e^{Kt} = \frac{R}{m} tg(\alpha)$$

$\cdot\ A(t) = \int \frac{R}{m} tg(\alpha)\, e^{kt}\, dt$

$= \frac{-R}{m} tg(\alpha) \cdot \frac{1}{k} e^{-kt}$

$\boxed{A(t) = \frac{R^2 tg(\alpha)}{B_0^2 \ell^2} e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}}$

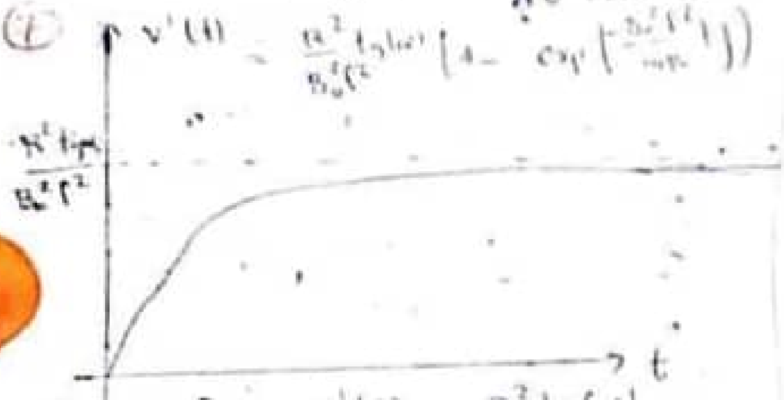
$\boxed{v_p'(t) = \frac{R^2 tg(\alpha)}{B_0^2 \ell^2}}$ (la solution particulière)

$\Rightarrow$ la solution général est donc

$v'(t) = A \exp\left(-\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t\right) + \frac{R^2 tg(\alpha)}{B_0^2 \ell^2}$

$v'(t) = \frac{R^2 tg(\alpha)}{B_0^2\ell^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{B_0^2\ell^2}{mR}t\right)\right)$

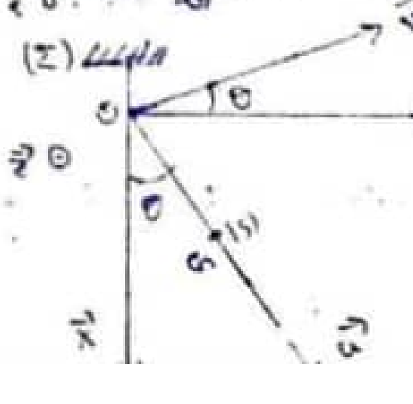
$\boxed{f}$ $v'(t) = \frac{R^2}{B_0^2 \ell^2} tg(\alpha)\left[1 - \exp\left(-\frac{B_0^2\ell^2}{mR}t\right)\right]$



$\lim\limits_{t\to\infty} v'(t) = \frac{R^2 tg(\alpha)}{B_0^2 \ell^2}$

- Mécanique :

- $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère galiléen lié au bâti (Σ)
- $R_s(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ repère lié au solide
- le solide est une tige homogène de longueur l de masse m de centre de gravité G.



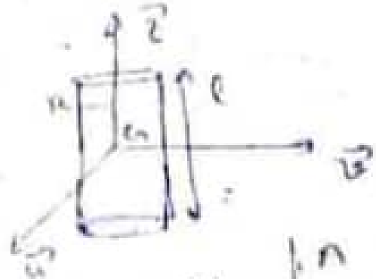
A) a) $\vec{V}(G/R) = \frac{d}{dt}(\vec{OG})\big|_R$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\ell}{2}\vec{u}\right)\Big|_R = \frac{\ell}{2}\dot\theta\vec{v}$

$\vec{\gamma}(G/R) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{OG})\big|_R = -\frac{\ell}{2}\dot\theta^2 \vec{u}$

2) - Étude cinétique :

1) déterminons la matrice d'inertie de la tige en G dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ (la tige = cylindre ou $R \to 0$)



$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

le cylindre représente une révolution axial en Gz

$\Rightarrow A = B$, σ la densité volumique de masse

$C = \int_{(S)} (x^2+y^2)\, dm = \sigma \iiint (x^2+y^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$

$x^2+y^2 = r^2 \quad \sigma = \frac{m}{V_T} = \frac{m}{R^2\pi\ell}$

$C = \frac{m}{R^2\pi\ell}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz$

$C = \frac{m}{R^2\cancel{\pi}\cancel{\ell}} \frac{R^4}{4} 2\cancel{\pi}\cdot\cancel{\ell} = \frac{mR^2}{2}$

$A = B = \frac{m}{R^2\pi\ell}\iiint (x^2+z^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$

$= \frac{m}{R^2\pi\ell}\left(\iiint r^3\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi\, dz + \iiint r\, dr\, d\varphi\, z^2 dz\right)$

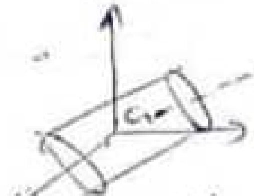
$= \frac{m}{R^2\pi\ell} \times \left(\frac{R^4}{4}\frac{\ell}{2} + \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{\ell^3}{12}\right) = \cdot$

$A=B=\frac{m}{R^2\pi l}\left[\frac{R^4\pi l}{8}+\frac{R^2\pi l^3}{12}\right]=\frac{mR^2}{8\pi}+\frac{ml^2}{12}$

pour $R \simeq 0 \Rightarrow A=B=\frac{ml^2}{12}$ / $C=0$

la matrice d'inertie donc de la tige est: en G dans $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$

est: $\begin{pmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pour  et $R \simeq 0$

$$M_G^{(S)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}$$ ✓

2) on définie le torseur cinétique comme suite:

$$C(S/R)=\begin{cases} \vec{R}_c = m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(S/R)=\vec{\sigma}_B(S/R)+m\vec{V}(G/R)\wedge\vec{BA} \end{cases}$$

la resultante cinétique est: $\vec{R}_c = m\vec{V}(G/R)=\frac{ml}{2}\dot{\theta}\vec{v}$ ✓

3) $\vec{\sigma}_A(S/R)=\int_{P\in(S)}\vec{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$

$= m\vec{AG}\wedge\vec{V}(A/R)+M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R)$.

pour $A=G$

$\vec{\sigma}_G(S/R)=M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R)$

$$\vec{\sigma}_G(S/R)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}=\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\vec{e}_z$$

le moment cinétique est un torseur

$\Rightarrow \vec{\sigma}_O(S/R)=\vec{\sigma}_G(S/R)+m\vec{V}(G/R)\wedge\vec{GO}$

$\vec{\sigma}_O(S/R)=\frac{ml^2\dot{\theta}}{12}\vec{e}_z+\frac{ml\dot{\theta}}{2}\vec{v}\wedge\frac{-l}{2}\vec{u}$

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/R)=\frac{ml^2\dot{\theta}}{3}\vec{e}_z}$$

4) l'expression integrale de $E_c(S/R)$ est: $\forall A\in(S)$

$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\int(V^2(P/R))\,dm$

$=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(A/R)+\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}(S/R)I_A^{(S)}\vec{\Omega}$

$+\vec{\Omega}(S/R)\cdot(m\vec{AG}\wedge\vec{V}(A/R))$

pour $A=O$. $\vec{V}(O/R)=\vec{0}$

$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}(S/R)\cdot M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R)$

$$M_O^{(S)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12}+m\left(\frac{l}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12}+m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$M_O^{(S)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{3}{ml^2}E_c(S/R)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dot{\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{3}{ml^2}E_c(S/R)=\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \boxed{E_c(S/R)=\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{3}}$$

3- Etude dynamique:

(1) en general

$\vec{\delta}_A(S/R)=\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_A(S/R))\Big|_R+\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$

pour $A=G$

$\vec{\delta}_G(S/R)=\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(S/R)\Big|_R=\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\vec{e}_z$

(2) le moment dynamique est un torseur: de resultante $m\vec{\gamma}(G/R)$ / $\vec{\delta}_A(S/R)=\vec{\delta}_O+m\vec{\gamma}\wedge\ldots$

② suite :

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \vec{\delta}_G(S/R) + m\vec{\gamma}(G/R) \wedge \vec{GO}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_O(S/R) = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\,\vec{e_z}} + \underbrace{\frac{-ml\dot{\theta}^2}{2}\vec{u} \wedge -\frac{l}{2}\vec{u}}_{=0}$$

③ Determinons le torseur des actions extérieures, appliquons en sur (S) en O : la seule force appliqué en (S) est : $\vec{P} = mg\,\vec{e_x}$

D'ou le torseur des actions ext :

$$[T_{\bar{S}\to S}] = \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ 0 \end{matrix} \right._{G}$$

④ appliquons le PFD ~~en A~~ dans R :

$$m\vec{\gamma}(G/R) = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{-ml\dot{\theta}^2}{2}\vec{u} = mg\cos\theta\,\vec{u} - mg\sin\theta\,\vec{e_z}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{ml\dot{\theta}^2}{2} + mg\cos\theta = 0 \quad (1) \\ \cancel{mg\sin\theta = 0} \end{matrix} \right.$$

en dérivant (1) on a :

$$\Rightarrow ml\ddot{\theta}\dot{\theta} - mg\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$ voila

l'équation du mvt :