ANALYSE

Durée de l'épreuve : 1 heure 30 mn

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.
Pour chacune des questions, une seule des cinq propositions est exacte.
Il sera attribué 2 points si la réponse est exacte, -1 si la réponse est fausse et zéro s'il n'y a pas de réponse.
L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.
Tout formulaire est interdit.

Question 1. La valeur de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

est :

a) $\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}$

b) $\ln 3 + \ln(\frac{1}{2})$

c) $\ln 2 - \frac{\ln 3}{2}$

d) $\ln 2 + \ln 3$

e) autre

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

Alors la limite de la suite u_n quand n tend vers $+\infty$ est :

a) 2

c) $\ln 2$

d) $-\ln 2$

e) autre

Question 3. Le developpement en série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π−périodique définie par

$$\forall x \in [0, 2\pi] : f(x) = x^2$$

est :

a) $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n^2}\sin(nx)\right)$

b) $\frac{8\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n^2}\sin(nx)\right)$

c) $\frac{4\pi^2}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n^2}\sin(nx)\right)$

d) $\frac{8\pi^2}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n^2}\sin(nx)\right)$

e) autre

Question 4. Soit la suite définie par

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x + x^2 + \ldots\ldots x^{2n}}\,dx.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$ est :

a) $+\infty$

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) autre

Question 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite définie par

$$u_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt.$$

Alors u_n est :

a) $n!$

b) $(n-1)!$

c) $(n+1)!$

d) $n! - e$

e) autre

Question 6. Soient ϕ et ψ deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et f la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{xy}\,\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy), \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$

alors $A(x,y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vérifie :

a) $A(x,y) = x$

b) $A(x,y) = y$

c) $A(x,y) = 0$

d) $A(x,y) = x - y$

e) autre

Question 7. On pose

$$I = \iiint_\Delta z^2 dx dy dz, \quad \text{où} \quad \Delta: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Alors :

a) $I = \frac{4\pi abc^3}{15}$

b) $I = \frac{4\pi ab^3c}{15}$

c) $I = \frac{4\pi a^3bc}{15}$

d) $I = 4\pi abc$

e) autre

Question 8. Soit la fonction

$$f(x) = ln\left|\frac{x-1}{2x}\right| - x,$$

C_f sa courbe représentative. Alors

a) Le point $I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \ln 2)$ est centre de symétrie de C_f .

b) Le point $I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \ln 2)$ est centre de symétrie de C_f .

c) Le point $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$ est centre de symétrie de C_f .

d) Le point $I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$ est centre de symétrie de C_f .

e) autre

Question 9. Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - x^2y^4, & x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Alors la solution $y(x)$ de cette équation différentielle est :

a) $y(x) = 2^{\frac{2}{3}}(x^3 + x^{-3})^{\frac{1}{3}}$

b) $y(x) = 2^{\frac{1}{3}}(x^3 + x^{-3})^{\frac{1}{3}}$

c) $y(x) = 2^{\frac{2}{3}}(x^3 + x^{-3})^{-\frac{1}{3}}$

d) $y(x) = 2^{\frac{1}{3}}(x^3 + x^{-3})^{-\frac{1}{3}}$

e) autre

Question 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2 .$$

Alors la fonction f est

a) linéaire

b) bilinéaire

c) constante

d) nulle

e) autre

niversité Hassan II
NSEM

Année 2012 - 2013

Concours DEUG ou Equivalent
Mathématiques 1 : 1 H 30

xercice 1 (8 pts)

our $A \in M_3(IR)$, on note $C(A) = \{M \in M_3(IR) \quad / \quad AM = MA \}$ le commutant de la natrice A.

1. Démontrer que, pour $A \in M_3(IR)$, C (A) est un espace vectoriel.
2. Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice

   $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.
3. Déterminer le commutant C(T) de la matrice T. Déterminer sa dimension
4. Démontrer que l'application $M \to P^{-1}MP$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $M_3(IR)$. Que peut-on déduire pour la dimension de C (A) ?
5. i) Existe-t-il un polynôme annulateur ~~annotateur~~ de A de degré inférieur ou égal à 2 ?

   ii) Démontrer que $C(A) = Vect\{I_3, A, A^3\}$

   iii) En déduire que C(A) est l'ensemble des polynômes en A. Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in M_3(IR)$?

xercice 2 (5 pts)

oit M une matrice nilpotente d'ordre p : $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$

1. Démontrer que I + M est inversible, ainsi que I-M
2. Soit la matrice A définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   i) Calculer l'inverse de A

   ii) Déterminer la puissance de A

Exercice 3 (7 pts)

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré au plus égal à n.

1. Donner la dimension de E_n et une base $\mathcal{B}$ de E_n
2. Soit f (P(X)= P(1 – X) . P étant un est polynôme de E_n
   - i) Montrer que f définit un endomorphisme de E_n
   - ii) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
   - iii) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   - iv) Déterminer les sous espaces propres et leurs dimensions
   - v) Diagonaliser la matrice de f.

Q1 (Q1.1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt =$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+2} \, dt$

$= \left[\frac{1}{2}\ln(t) - \ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t+2)\right]_1^{+\infty}$

$= \left[\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x+2}}{x+1}\right) - \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)\right.$

$= \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(2)$

Q2. soit $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$

$U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ d'ou.

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$

$x f(x)$

Q3. le developpement en serie de fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, 2π periodique définie par.

$(1+\frac{x}{n})$

$\forall x \in [0, 2\pi) : f(x) = x^2$

est : $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n^2}\sin(nx)\right)$.

Q4:

soit $U_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x+\dots x^{2n})^{-1} dx$

$\frac{1}{1+x+\dots x^{2n}} = \frac{1-x}{1-x^{2n+1}}$ sur $[-1,1]$

$\frac{1-x}{1-x^{2n+1}} \sim 1$ on a $2n+1$ est impaire $\forall n \in \mathbb{N}$

et $\forall x \in [-1,1]$ $\frac{1-x}{1-x^{2n+1}} = 1$

et pour $n \sim +\infty$

$\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$\frac{1-x}{1-x^{2n+1}} \sim 0$

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

Q5: soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$U_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt.$

$$\begin{cases} t^{n-1} \xrightarrow{d} (n-1)t^{n-2} \\ e^{-t} \xrightarrow{\int} -e^{-t} \end{cases}$$

$\Rightarrow U_n = \left[-t^{n-1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-2}\,dt$

$\Rightarrow U_n = (n-1)U_{n-1} \quad \forall n \geq 1$ et pour

$n=1 \quad U_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$

$\Rightarrow \boxed{U_n = (n-1)!} \quad \forall n \geq 1$

Q6: soient ϕ et ψ deux fonction de classe $C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et f définie par

$f(x,y) = \sqrt{xy}\,\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy)$

$A(x,y) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

.....

Q7: $I = \iiint_\Delta z^2\,dx\,dy\,dz$

$\Delta = \left\{M(x,y,z),\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$

posons $\begin{cases} u = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\,du \\ v = \frac{y}{b} \Rightarrow dy = b\,dv \\ w = \frac{z}{c} \Rightarrow dz = c\,dw \end{cases}$

$I = \iiint_{\Delta'} abc\cdot c^2 w^2\,du\,dv\,dw$

$I = abc^3\iiint_{\Delta'} w^2\,du\,dv\,dw$

$\Delta' = \{M(u,v,w),\ u^2+v^2+w^2 \leq 1\}$

passant aux coordonnées Sphériques

$\begin{cases} u = a r\sin\theta\cos\varphi \\ v = b r\sin\theta\sin\varphi \\ \boxed{w = c r\cos\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$

$\cdot\ I = abc^3\iiint r^4\,dr\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$\cos^2\theta\sin\theta = \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\sin\theta$

$= \frac{1}{4}(\sin\theta + \sin(3\theta))$

$\Rightarrow I = abc^3\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\cdot\frac{1}{4}\left[-\cos\theta - \frac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$

$\boxed{I = abc^3\cdot\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times 2\pi = \frac{4\pi abc^3}{15}}$

Q8: réponse contre

Q9: $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^2y^4,\ x>0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2^{\frac{1}{3}}(x^3 + x^{-3})^{-\frac{1}{3}}}$

Q10: fonction constante.

ENSEM Algèbre 2012/2013

Exercice 1:

pour $A \in M_3(\mathbb{R})$ on note $C(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ le commutant de la matrice A.

1- soi $D, B, C \in C(A)$ ou A est un élément quelconque de $M_3(\mathbb{R})$

on a $(B+C)+D = B+(C+D)$

$\Rightarrow \exists\, O_{M_3(\mathbb{R})} \in C(A)$ tq: $\forall C \in C(A)$

$C + O_{M_3(\mathbb{R})} = C$

$\cdot \forall D \in C(A) \quad \exists\, D' \in C(A)$ tq:

$DA = AD$ et $D'A = AD'$

et $D + D' = O_{M_3(\mathbb{R})} \quad D' = -D$

$(C(A), +)$ est un groupe abelien

$\cdot \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall B \in C(A)$

$\alpha(\beta B) = (\alpha\beta)B$

$\cdot \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall B \in C(A)$

$(\alpha+\beta)B = \alpha\beta + \beta B$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $B, C \in \mathbb{R}_3(M_3(\mathbb{R}))$

$\alpha(B+C) = \alpha B + \alpha C$

$\forall B \in C(A) \ \exists\, I_3 \in M_3(\mathbb{R}) / I_3$

$BI_3 = B$

- Alors $C(A)$ est e.v $\forall A \in M_3(\mathbb{R})$

2- $A = \begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix}$

$P_{car_A}(X) = \begin{vmatrix}1-X&4&-2\\0&6-X&-3\\-1&4&-X\end{vmatrix}$

$= (1-X)\begin{vmatrix}6-X&-3\\4&-X\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}4&-2\\6-X&-3\end{vmatrix}$

$= (1-X)(-X(6-X)+12) - (-12+2(6-X))$

$= (1-X)(6-X)(-X) + 12(1-X)$

$+12 - 2(6-X)$

$= (6-X)(-X+X^2-2) + 12(1-X+1)$

$= (6-X)(X+1)(X-2) + 12(2-X)$

$= (X-2)((6-X)(X+1)-12)$

$= (X-2)(6X+6-X^2-X-12)$

$= (X-2)(-X^2+5X-6)$

$= (X-2)^2(X-3) = P_{car_A}(X)$

les valeurs propres de A sont 2 et 3 $\Rightarrow$ A est trigonalisable car $P_{car_A}(X)$ est scindé

D'où. A semblable à $T = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$

3- $P \in M_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_3(\mathbb{R})$

tq. $A = PTP^{-1}$

Calculons les sous espaces propres associé à $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$

soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1&4&-2\\0&4&-3\\-1&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}-x+4y-2z=0\\ 4y-3z=0 \quad (\Leftrightarrow)\\ -x+4y-2z=0\end{cases}$

$x = z \qquad y = \frac{3}{4}z$

$\Rightarrow \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{4}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ Vect$\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$

$\ker(A-2I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$.

soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(A-3I_3)$

$\begin{pmatrix}-2&4&-2\\0&3&-3\\-1&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-2x+4y-2z=0\\ 3y-3z=0 \qquad z=y\\ -x+4y-3z=0\end{cases}$

$L_3: -x+4z-3z=0 \Rightarrow -x+z=0$

$z = x$.

$\ker(A-3I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

il reste à chercher un vecteur $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq: $\begin{vmatrix}1&4&u\\1&3&v\\1&4&w\end{vmatrix} \neq 0$

c-à-d $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}3&v\\4&w\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1&v\\1&w\end{vmatrix} + u\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$

$= (3w-4v) - 4(w-v) + u(4-3)$

$= 3w - \cancel{4v} - 4w + \cancel{4v} + \cancel{4u} - 3u \neq 0$

$-w+u \neq 0$

$\Rightarrow 3(w-u) \neq 0 ; \quad w \neq u$

et $\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1&4&-2\\0&4&-3\\-1&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$ avec

$\cancel{\begin{cases}4v-2w=8\\ 5v-3w=6\\ -u+4v-w=8\end{cases}}$

$BI_3 = B$

- Alors $C(A)$ est e.v $\forall A \in M_3(\mathbb{R})$

2- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$P_{car_A}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix}$

$= (1-X)\begin{vmatrix} 6-X & -3 \\ 4 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6-X & -3 \end{vmatrix}$

$= (1-X)(-X(6-X)+12) - (-12+2(6-X))$

$= (1-X)(6-X)(-X) + 12(1-X)$
$+12 - 2(6-X)$

$= (6-X)(-X+X^2-2) + 12(1-X+1)$

$= (6-X)(X+1)(X-2) + 12(2-X)$

$= (X-2)((6-X)(X+1) - 12)$

$= (X-2)(6X+6-X^2-X-12)$

$= (X-2)(-X^2+5X-6)$

$= (X-2)^2(X-3) = P_{car_A}(X)$

Les valeurs propres de A sont 2 et 3 $\Rightarrow$ A est trigonalisable car $P_{car_A}(X)$ est scindé

D'où A semblable à $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3- $P \in M_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_3(\mathbb{R})$

tq: $A = PTP^{-1}$

Calculons les sous espaces propres associé à $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - 2I_3)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x+4y-2z = 0 \\ 4y-3z = 0 \quad (=) \\ -x+4y-2z = 0 \end{cases}$

$x = z \qquad y = \frac{3}{4}z$

$\Rightarrow Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

$Ker(A - 2I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - 3I_3)$

$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x+4y-2z = 0 \\ 3y-3z = 0 \qquad z = y \\ -x+4y-3z = 0 \end{cases}$

$L_3: -x+4z-3z = 0 \Rightarrow -x+z = 0$
$z = x$.

$Ker(A - 3I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

il reste à chercher un vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & u \\ 1 & 3 & v \\ 1 & 4 & w \end{vmatrix} \neq 0$

C-à-d $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & v \\ 4 & w \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & v \\ 1 & w \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= (3w - 4v) - 4(w - v) + u(4-3)$

$= 3w - \cancel{4v} - \cancel{4w} + \cancel{4v} + \cancel{4u} - 3u \neq 0$

$-w + u \neq 0$

$\Rightarrow 3(w - u) \neq 0 \;; \; w \neq u$

et $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ avec

$\cancel{\begin{cases} 4v - 2w = 8 \\ 5v - 3w = 6 \\ -u + 4v - w = 8 \end{cases}}$

on obtient le système :

$$\begin{cases} -u+4v-2w=4 \\ 4v-3w=3 \\ -u+4v-2w=4 \end{cases} \quad \text{et} \quad w \neq u.$$

soit $\boxed{u=2} \Rightarrow \begin{cases} 4v-2w=6 \\ 4v-3w=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{w=3}$

$\Rightarrow 4v = 3(1+w) = 12$

$\Rightarrow \boxed{v=3}$

d'où. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

d'où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $P \in GL_3(\mathbb{R})$

d'où : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ est une base dans laquel la matrice de l'appli l'endomorphisme associé à A est triangulaire de matrice

$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{A = PTP^{-1}}$

3) soit. $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \in C(T) \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 3A \ / \ 3B = 2B \ / \ 3C = 2C + B \\ 2D + G = 3D \ / \ 2E + H = 2E \ / \ 2F + I = E + 2F \\ 2G = 3G \ / \ 2H = 2H \ / \ H + 2I = 2I \end{cases}$$

$\Rightarrow B = G = D = C = H = 0 \ / \ E = I$

D'où. $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \in C(T) \quad \forall A, E, F \in \mathbb{R}.$

d'où

$C(T) = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) / MT = TM \} /$

$M = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad \forall \ A, E, F \in \mathbb{R} \}$

D'où. $\mathrm{Dim}(C(T)) = 3 = \dim(T)$

4) soit l'application $: M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$
$M \mapsto P^{-1}MP$

$C(P) = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) / PM = MP \}$
$\forall P \in M_3(\mathbb{R})$, $P \in GL_3(\mathbb{R})$

rappel : si $M_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$, les automorphisme des espaces vect de $M_3(\mathbb{R})$ sont les applications bijectives des espaces vect de $M_3($ dans lui même. lorsque ces espaces sont en dimension finie

soit : $M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$
$M \longmapsto P^{-1}MP$
$\forall P \in GL_3(\mathbb{R})$

cette application est bijective ssi $\forall \ P^{-1}MP \in M_3(\mathbb{R}) \ \exists! \ M \in M_3(\mathbb{R})$ tq. $M \longmapsto P^{-1}MP$. supposons $\exists M' \in M_3(\mathbb{R})$ t.q.f : $M' \longmapsto P^{-1}MP$

D'où : $M - M' = 0_{M_3(\mathbb{R})} \Rightarrow M = M'$

D'où l'application est bijective sur $M_3(\mathbb{R})$ et sur tout e.v de $M_3(\mathbb{R})$

Alors : $\dim \ker f = 0$
$\dim \mathrm{Im} f = 3^2 = 9.$
d'après théorème du rang

Alors : $\dim(C(A)) = 9 \quad \forall A \in G$
$\dim(C(A)) = \dim(A)$

5 1)

A n'est pas diagonalisable d'où. le polynome minimal ne peut pas être de la forme $(X-2)(X-3)$ et d'après théorème de Caylay hamilton $(X-2)^2(X-3)$ est une polynome Annulateur.

ona $(X-2)$ et $(X-3)$ ne sont pas des polynomes minimales de A. $(X-2)(X-3)^2$ aussi n'est pas un polynome minimal $\Rightarrow$ d'où

$\boxed{L_3 : x_3 = b_3 - 2b_4 + b_5}$

$L_2 : x_2 = b_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5$

$x_2 = b_2 - 2(b_3 - 2b_4 + b_5) - 3(b_4 - 2b_5) - 4b_5$.

$x_2 = b_2 - 2b_3 + 4b_4 - 2b_5 - 3b_4 + 6b_5 - 4b_5$

$\boxed{x_2 = b_2 - 2b_3 + b_4}$

$x_1 = b_1 + 3x_2 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5$

$x_1 = b_1 - 2(b_2 - 2b_3 + b_4) - 3(b_3 - 2b_4 + b_5)$

$-4(b_4 - 2b_5) - 5b_5$.

$= b_1 - 2b_2 + 4b_3 - 2b_4 - 3b_3 + 6b_4 - 3b_5$

$- 4b_4 + 8b_5 - 5b_5$

$\boxed{x_1 = b_1 - 2b_2 + b_3}$

donc dans (S) : $x = A^{-1} b$.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - 2b_2 + b_3 \\ x_2 = b_2 - 2b_3 + b_4 \\ x_3 = b_3 - 2b_4 + b_5 \\ x_4 = b_4 - 2b_5 \\ x_5 = b_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) on a :

$A = I_5 + P$ où $P \in M_5(\mathbb{R})$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ P^5 = O_{M_5(\mathbb{R})}$$

P est nilpotent d'ordre 5 $\forall k \geq 5 \; P^k = 0$

et $A^n = (I_5 + P)^n$ en utilisant le binôme de Newton on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} P^k$$

$$A^n = I_5 + nP + \frac{n(n-1)}{2} P^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} P^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} P^4$$

$A^n =$

$$\boxed{A^n = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} P^k}$$

Exercice 3 : soit E_n l'espace vect des polynômes à coefficients complexes de degré au plus égal à n

1) $\dim(E_n) = n+1$ et on donne une base de E_n comme suite :

$\{1, X, X^2, \dots, X^n\} = B$

2) soit $f(P(X)) = P(1-X)$ $\forall P \in E$

(i) $f : E_n \to E_n$ est un endomorphisme de E_n car $\deg(P(X)) \leq n$ et $\deg(P(1-X)) \leq n$ d'où $\forall P(X) \in E_n$ $f(P(X)) \in E_n$

$\Rightarrow$ f est une application linéaire de E_n dans lui même

$\forall P, Q \in E_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$f[(\lambda P + Q)(X)] = (\lambda P + Q)(1-X)$

$\Rightarrow P(1-X) + Q(1-X) = \lambda f(P) + f(Q)$

(ii) $f(1) = 1$ / $f(X) = 1-X$.

$f(X^2) = (1-X)^2 = 1-2X+X^2$

$f(X^3)(1-X)^3 = (1-2X+X^2)(1-X)$

$= 1-2X+X^2-X+2X^2-X^3$

$= -X^3+3X^2-3X+1$

$f(X^n) = (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} X^k (-1)^k$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^k$ (binome de newton)

on donne la matrice de f dans B

$$Mat_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -\binom{n}{1} \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^n\binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

$Mat_f(B) \in M_{n+1}(\mathbb{C}/\mathbb{K})$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R}/\mathbb{C})$

(iii) $(-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!(n-n)!} = (-1)^n$.

$\forall n \geq 2$ les deux valeurs propre de cette endomorphisme sont 1 et -1

$Sp(f) = \{1, -1\}$

(iv) determinons le sous espace propre associé à $\lambda = 1$ $E_1 = Ker(M - I_{n+1})$

$\Rightarrow Mat_f(B) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$

$P(X) \in E_1$

$(a_i) \in \mathbb{C}$ $\forall i \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_0 \\ \vdots \quad -a_1 - 2a_2 - \dots - n a_n = a_1 \\ \vdots \\ (-1)^n a_n = a_n \end{cases}$$

$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \geq 1$

d'ou $E_1 = a_0 \quad \forall a_0 \in \mathbb{C}$

- le sep associé à $\lambda = 1$ est l'ensemble des polynomes constantes qui ne dépend pas de X. $\dim E_1 = Vect\{(1)\}$

$E_1 = Vect\{(1)\}$ $\dim(E_1) = 1$

determinons E_{-1} le sep associé à -1 soit $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in E_{-1}$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = -a_0 \\ -a_1 - 2a_2 - \dots = -a_1 \\ \vdots \\ (-1)^n a_n = a_n \end{cases}$$

$\Rightarrow a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$

$\forall n \geq 2$ et $2a_0 = -a_1$

$E_{-1} = Vect\{(1-2X)\}$

$\dim E_{-1} = 1$.

v) on ne peut pas diagonaliser la matrice de f si $n \geq 3$

on ~~peut~~ car les sous e p ne sont pas en somme directe si $n \geq 3$ ailleurs pour $n \leq 2$

$n = 1$ / $n = 2$ on peut diagonaliser

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

fcm(x) resultats n'est pas generalises f est diagonalisable

- ENSEM 2014 Analyse

Exercice 1 : soit $a \in \mathbb{R}$ et n un entier $n > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$u_n(x) = \frac{n^a x e^{-nx}}{n^2+1}$ on note I le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1) l'ensemble de définition de $S(x)$