

Epreuve de Mathématiques

Question 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$

(A) $\ln 2$

(B) $2e^2$

(C) e

(D) 2

Question 2

Calculer la dérivée de la fonction f définie, pour $x > 0$, par $f(x) = (1+x)^{x^2}$.

(A) $f'(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{x^2} \left(\frac{x^2}{1+x} - 2x \ln(1+x)\right)$

(B) $f'(x) = (1+x^2)^{x^2} \left(\frac{x^2}{1+x} + \frac{x \ln(1+x)}{2}\right)$

(C) $f'(x) = (1+x)^{x^2} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \ln(1+x)\right)$

(D) $f'(x) = (1+x)^{x^2} \left(\frac{x^2}{1+x} + 2x \ln(1+x)\right)$

Question 3

Donner la valeur de l'intégrale suivante $J = \int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

(A) $\frac{9}{2} + 2 \ln 3$

(B) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$

(C) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} \ln 2$

(D) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \ln 2$

Question 4

Déterminer a et b pour que la fonction f suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ (ax+b)^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

(B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

(D) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Question 5

Calculer le développement limité en 0 de la fonction suivante $f(x) = \frac{\ln(1+x^3)}{x - \sin x}$

(A) $6 + \frac{3x^2}{5} - 3x^3 + o(x^3)$

(B) $3 + \frac{3x^2}{10} + o(x^2)$

(C) $6 + \frac{3x^2}{10} - 3x^3 + o(x^3)$

(D) $6 - \frac{3x^2}{10} + 3x^3 + o(x^3)$

Question 6

A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite de la suite dont le terme

général est $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$.

(A) $\frac{2\pi+3}{6}$

(B) $\frac{2}{\pi}$

(C) $\frac{\pi-1}{2}$

(D) $\frac{1}{2\pi}$

Question 7

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n2^n}$.

1. Calculer le rayon de convergence R de cette série et Déterminer D son domaine de convergence.

(A) $R = \frac{1}{2}, D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(B) $R = \sqrt{2}, D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

(C) $R = 1, D = [-1, 1]$

(D) $R = 2, D = [-2, 2]$

2. On note $S(x)$ la somme de la série quand celle-ci est définie. Donner l'expression de la dérivée $S'(x)$ et $S(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.

(E) $S'(x) = \frac{x}{2-3x^2}, S(x) = x + \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2}}$

(F) $S'(x) = \frac{x}{2-x^2}, S(x) = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2}}$

(G) $S'(x) = \frac{2x}{2-x^2}, S(x) = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}$

(H) $S'(x) = \frac{x}{2-x}, S(x) = \frac{x}{2} + \ln(1+x)$

Question 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$, I_n et I_{n-2} sont liées par la relation de récurrence suivante :

(A) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

(B) $I_n = \frac{2n-1}{n} I_{n-2}$

(C) $I_n = \frac{n-2}{n} I_{n-1}$

(D) $I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-1}$

Question 9

Parmi les valeurs suivantes, une n'est pas un pôle de $\frac{1}{z^4 + 1}$

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ✓

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$
 ζ_8

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
 ζ_8

Question 10

Pour $n \geq 2$, La somme de la série numérique $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ vaut

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $-\ln 2$

(C) $\frac{e}{2}$

(D) 0

Question 11

A l'aide de l'identité de Parseval préciser la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x) dx$

(A) $\frac{3}{4\pi}$

(B) $\frac{8}{3\pi}$

(C) $\frac{3\pi}{8}$

(D) $\frac{3}{8}$

Question 12

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{x}{x+2^n}$, alors

(A) Converge Uniformément sur $\mathbb{R}$

(B) Converge Uniformément sur $\mathbb{R}^+$

(C) $f'(0) = 2$

(D) $f'(0) = \frac{1}{2}$

Question 13

Soit A l'intégrale double définie par $A = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$, où $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

1. Calculer A.

(A) 1

(B) $\frac{2}{\pi}$

(C) $\frac{\pi-1}{2}$

(D) 2π

Soit B l'intégrale double définie par $B = \iint_{D_2} (x^2 - xy + y^2) dx dy$, où $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - xy + y^2 \leq 4\}$.

Considérons le changement de variables $x = \sqrt{2} u - \sqrt{\frac{2}{3}} v, y = \sqrt{2} u + \sqrt{\frac{2}{3}} v$

2. Déterminer le Jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$.

(E) 2

(F) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(G) $\frac{1}{2}$

(H) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Question 14

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer P(B)

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{10}$

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer P(B).

(E) $\frac{3}{10}$

(F) $\frac{4}{3}$

(G) $\frac{3}{8}$

(H) $\frac{2}{3}$

Question 15

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

(A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -7 & 6 & -5 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -7 & 6 & -5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -7 & 6 & -5 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(D) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -7 & 6 & -5 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Question 16

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{8}{3}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{4}{3}$

b. Deux boules de couleurs différentes.

(E) $\frac{3}{4}$

(F) $\frac{2}{3}$

(G) $\frac{1}{9}$

(H) $\frac{1}{12}$