

Epreuve de Mathématiques

Durée : 50 min

Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 + (4 - 9i)z - 5(1 + i) = 0$.

Exercice 2

On considère les intégrales

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^p} dt \text{ et } J_p = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^p} dt$$

1. Déterminer toutes les valeurs de l'entier p pour lesquelles l'intégrale I_p est convergente. Même question pour J_p .

2. cocher la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$:

a) $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt$; c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$

3. Déduire la valeur de I_2 .

Exercice 3

1. Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \sin^3 x$.
2. A l'aide de la formule de Parseval, donner la valeur de $\int_0^\pi \sin^6 x dx$.

Exercice 4

Soit $\alpha \in]0, +\infty[$, Etudier pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$

- a) converge absolument, b) converge.

Exercice 5

On considère l'application linéaire T de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par :

$$T(x, y, z) = (5x - 2y + 2z, 2x - y, x + y + z)$$

- a. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Quelle est alors la norme de T ?
- b. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\| \cdot \|_1$. Quelle est alors la norme de T ?