Concours d'entrée en 1ère année du

EPREUVE D'ANALYSE

mercredi 13 septembre 2017 – Durée 1h

Notation :

L'épreuve comporte 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est juste.

Réponse juste = 2 points ; Réponse fausse = -1 point ; Pas de réponse = 0 point.

La note de l'épreuve sera ramenée à 0 en cas de total négatif.

Les calculatrices sont strictement interdites

Q1 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n>0} \frac{x^n}{2n^2-n}$ est :

(A) $R = \frac{1}{2}$ (B) $R = +\infty$ (C) $R = 0$ (D) $R = 1$.

Q2 : La série $\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est :

(A) à termes positifs (B) convergente (C) divergente (D) absolument convergente

Q3 : Soit $\lambda = Arccos\left(\frac{5}{13}\right) + Arccos\left(\frac{12}{13}\right)$ $(\lambda \in]0, \pi[)$:

(A) $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (B) $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ (C) $\lambda = \frac{13\pi}{17}$ (D) $\lambda = \frac{\pi}{13}$.

Q4 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}}$ donc :

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ (C) n'admet pas de limite (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Q5 : soit la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

(A) u_n est divergente (B) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$ (C) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ (D) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Q6 : $\forall a \in \mathbb{R}^+$ et $\forall b \in \mathbb{R}^+$ on a :

(A) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{a+b}$ (B) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}$ (C) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 2\sqrt{a+b}$ (D) $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 2\sqrt{}$

(A) $f(x) = 1 + [illegible] - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (B) $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(C) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (D) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Q9 : La solution générale à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}(2 - x^2)$ est donné par (α et β étant deux constantes réelles) :

(A) $y(x) = \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x) + 2x^2e^{3x}$ (B) $y(x) = 2x^2e^{3x} + \beta e^{2x}$

(C) $y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{2x} + 2x^2e^{3x}$ (D) $y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{2x}$

Q10 : La solution générale de l'équation différentielle : $y' + 2y = \frac{2}{1+e^{2x}}$ est définie, pour λ une constante réelle, par :

(A) $y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ (B) $y(x) = \lambda e^{-2x} + e^{-2x}\ln(1 + e^{2x})$

(C) $y(x) = e^{-2x}\left(\lambda + \frac{1}{1+e^{2x}}\right)$ (D) $y(x) = \lambda e^{-2x} + e^{2x}$

Q11 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(A) f est continue au point (0,0) (B) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (C) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$ (D) f est différentiable en (0,0)

Q12 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. Le point (x_0, y_0) est minimum local de f :

(A) $(x_0, y_0) = (0,0)$ (B) $(x_0, y_0) = (1,1)$ (C) $(x_0, y_0) = (1,0)$ (D) $(x_0, y_0) = (0,1)$

Q13 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2 - x^3 + y^2 + y^3}{x^2+y^2}$. La limite de f en (0,0) vaut :

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ (C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$ (D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{3}{2}$

Q14 : La somme de la série entière $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$ vaut :

(A) $\frac{x}{1-x}$ (B) $\ln(1+x)$ (C) $-\ln(1-x)$ (D) $\frac{1}{1+x}$.

Q15 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1\}$ et $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$

(A) $I = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ (B) $I = \frac{\pi}{4}$ (C) $I = 2\pi$ (D) $I = \pi\ln(2)$.

Q16 : soit la suite de terme général $u_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+n}}$

(A) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$ (B) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (C) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ (D) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Q17 : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a :

(A) $E(a+b) \leq E(a)+E(b)$ (B) $E(a+b) \geq E(a)+E(b)$

(C) $E(a+b) > E(a)+E(b)$ (D) $E(a+b) = E(a)+E(b)$

Q18 : On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi t x}dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 1+x\,, -1 < x \leq 0 \\ 1-x\,, \ 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad\ , \quad |x| \geq 1 \end{cases}$. Sa transformée de Fourier vaut :

(A) $F(t) = \frac{\sin^2(t\pi)}{\pi^2 t^2}$ (B) $F(t) = \frac{\sin(t\pi)}{2\pi t}$

(C) $F(t) = \frac{\cos^2(t\pi)}{\pi t^2}$ (D) $F(t) = \frac{\sin(2t\pi)}{\pi t}$

Q19 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = (\sin(x+2y)\,, \cos(2x+y))$.

La matrice jacobienne de f en tout point (x,y) est donnée par :

(A) $\begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ -2\sin(2x+y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2\cos(2x+y) & -2\cos(x+2y) \\ -2\sin(2x+y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -2\sin(x+2y) & \cos(x+2y) \\ -2\sin(2x+y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \cos(2x+y) & 2\cos(2x+y) \\ \sin(x+2y) & \sin(x+2y) \end{pmatrix}$

Q20 : Soit $\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ et $J = \iiint_\Delta \cos(x+y-z)\,dxdydz$

(A) $J = \frac{5}{2}$ (B) $J = 2$ (C) $J = \frac{2}{3}$ (D) $J = \frac{1}{8}$.

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Oujda

Concours d'accès en première année du cycle ingénieur
Septembre 2017
Epreuve d'algèbre
Durée : 30 mn

Q 21 : Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, la famille $\{(-1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$:

A) est liée ;
B) est libre ;
C) est une base ;
D) est un système générateur.

Q 22 : L'ensemble E suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 :

A) $E=\{(x,y,x)\in \mathbf{R}^3 : xy=0\}$;
B) $E=\{(x,y,x)\in \mathbf{R}^3 : x-y-z=0\}$;
C) $E=\{(x,y,x)\in \mathbf{R}^3 : x+y=0 \text{ ou } x-y=0\}$;
D) $E=\{(x,y,x)\in \mathbf{R}^3 : x-y=0 \text{ et } x+z=0\}$.

Q 23 : Le polynôme P(X) suivant est divisible par X(X-1) :

A) $P(X) = X^{30}+3X-2$;
B) $P(X) = 2X^{15}-2X^2+X$;
C) $P(X) = X^2+X-2$;
D) $P(X) = X^{99}+X^2-2X$.

Q 24 : Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est :

A) 1 ;
B) 2 ;
C) 3 ;
D) 4.

Q 25 : Soit L l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ défini par $L(x,y,z) = (x-z, z-y, 0)$:

A) Le rang de L est 1 ;
B) La dimension de l'image de L est 3;
C) La dimension du noyau de L est 1 ;
D) L est un automorphisme.

Q 26 : Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que det(A)=2 et trace(A)=3. Le polynôme caractéristique de A est :

A) $2X^2+3X$;

B) $3X^2+2X$;

C) X^3+3X^2+2;

D) X^2-3X+2.

Q 27 : Soit A une matrice carrée triangularisable :

A) Les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux ;

B) A est semblable à une matrice diagonale réelle ;

C) Le polynômes caractéristiques de A est scindé;

D) A est diagonalisable.

Q 28 : Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n:

A) Si det(A) =0, alors A est inversible ;

B) Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique ;

C) Si A est diagonalisable, alors A admet n valeurs propres distinctes ;

D) Si A est diagonalisable, alors les racines de son polynôme caractéristique sont simples.

Q 29 : Sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$:

A) L'application $\varphi((x,y,z),(x',y',z'))= xx'+ y^2y'$ est une forme bilinéaire

B) La forme bilinéaire $\varphi((x,y,z),(x',y',z'))= xx'+ yy'$ est un produit scalaire;

C) L'application $q(x,y,z)=x^2+y^3+z^2$ est une forme quadratique ;

D) Le rang de la forme quadratique $q(x,y,z)=x^2-3(x+y)^2+2z^2$ est 3.

Q 30 : Dans l'espace euclidien usuel $\mathbf{R}^3$:

A) L'orthogonal de la droite dirigée par le vecteur $(1,1,-1)$ est $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y-z=0\}$;

B) La famille $\{ (1,0,1)\ (1,0,-1), (-1,0,1) \}$ est une base orthogonale ;

C) Le plan $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+z=0\}$ est orthogonal à la droite dirigée par le vecteur $(1,1,-1)$;

D) L'orthogonal de $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3: x-y=0\}$ est $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y=0\}$;