Concours d'entrée en première année
Cycle ingénieur de l'ENSAO

Epreuve de Mathématiques

Mercredi 27 juillet 2011 - Durée 2 heures

Les calculatrices sont strictement interdites

Question 1

Le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

(A) $1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$ **(B)** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$

(C) $-\dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$ **(D)** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + x^2\varepsilon(x)$

Question 2

La fraction rationnelle $\dfrac{3X^3 + X}{(X+1)^2\,(X^2+1)}$ se décompose en éléments simples sous la forme

(A) $\dfrac{3}{X+1} - \dfrac{2}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X^2+1}$ **(B)** $\dfrac{2}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X^2+1}$

(C) $\dfrac{3}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{2}{X^2+1}$ **(D)** $\dfrac{1}{X+1} - \dfrac{3}{(X+1)^2} + \dfrac{2}{X^2+1}$

Question 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) & \text{si } x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$

(A) f est continue sur $\mathbb{R}$ **(B)** f est continue à droite en 1

(C) f est dérivable à droite en 1 **(D)** f est dérivable à gauche en 1

Question 4

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(A) Les lignes de A sont linéairement indépendantes.
(B) La matrice A admet -1 pour valeur propre.
(C) Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
(D) La matrice A admet trois valeurs propres distinctes.

Question 5

La somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ vaut

(A) $\dfrac{3}{4}$ **(B)** $-\dfrac{3}{4}$ **(C)** $\dfrac{3}{2}$ **(D)** $-\dfrac{3}{2}$

Question 6

On considère l'équation différentielle $(E) : 4y''(t) - 5y'(t) + y(t) = 0$.
Si l'on désigne par λ et μ deux constantes réelles, alors la solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

(A) $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{2}} + \mu e^{2t}$ **(B)** $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{4}} + \mu e^{t}$

(C) $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{4}} + \mu e^{t}$ **(D)** $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{4}} + \mu e^{-t}$

Question 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.
I_n et I_{n+1} sont liées par la relation de récurrence suivante :

(A) $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n + \dfrac{1}{n2^{n+1}}$ **(B)** $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n} I_n + \dfrac{1}{2^n}$

(C) $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n} I_n - \dfrac{1}{2^n}$ **(D)** $I_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1} I_n - \dfrac{1}{2^n}$

Question 8

L'intégrale double $I = \displaystyle\int\int_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\right\}$, vaut

(A) $\dfrac{\pi \ln 2}{4}$ **(B)** $\pi \ln 2$ **(C)** $2\pi \ln 2$ **(D)** $\dfrac{\pi \ln 2}{2}$

Question 9

Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

(A) La forme algébrique de z est $z = 1 - i$.
(B) L'argument de z est $Arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π).
(C) $|z| = \sqrt{2}$.
(D) $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 10

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet (x, y, z) de réels associe le triplet $(x+3z,\ 0,\ y-2z)$.
La matrice A de f s'écrit dans la base canonique $\mathcal{B}$:

(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(B)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(D)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Question 11

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{3n^3+n+1}{n!} x^n$ est

(A) $R = 1$ (B) $R = 0$ (C) $R = +\infty$ (D) $R = \frac{1}{3}$

Question 12

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$.
Cette équation admet :

(A) deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
(B) une solution réelle.
(C) deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
(D) une solution qui a pour partie imaginaire 2.

Question 13

La limite en 0 de la fonction $\frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$ est égale à

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

Question 14

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Parmi les affirmations suivantes laquelle est juste ?

(A) Si le gradient de f s'annule en (a,b) alors $a = b = 1$.
(B) Le point $A(0,0)$ est un minimum local de f.
(C) Le point $B(-1,-1)$ est un maximum local de f.
(D) $(1,1)$ est un point selle de f.

Question 15

Parmi les intégrales généralisées suivantes, une seule est convergente. Laquelle ?

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ (B) $\int_1^{+\infty} x \sin^2(\frac{1}{x})\, dx$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ (D) $\int_1^{+\infty} (x^2-1)\, dx$

Question 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$ et soit D son domaine de définition.

(A) $D =]0, +\infty[$ (B) f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

(C) $\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{(1+\ln x)^2}$ (D) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Question 17

Soit l'équation différentielle du premier ordre $(E) : y'(t) = \frac{2t-1}{t^2} y(t) + 1$. Alors

(A) $y(t) = t^2(1 + e^{-1/t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(B) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

(C) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de l'équation homogène associée à (E).

(D) $y(t) = 2t^2 e^{1/t}(1 + e^{-1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Question 18

Parmi les séries numériques suivantes, une seule est convergente. Laquelle ?

(A) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$

(B) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(C) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

(D) $u_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$

Question 19

Soit f la fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi - x}{2} & \text{si } 0 < x < 2\pi \\ f(0) = f(2\pi) = 0 & \end{cases}$$

On note $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ son développement en série de Fourier. Alors

(A) $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(B) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(C) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = b_n$

(D) $\forall x \in \mathbb{R}, \ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$

Question 20

Parmi ces affirmations laquelle est juste ?

(A) Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des deux degrés.

(B) Si un polynôme est divisible par deux polynômes alors il est divisible par leur produit.

(C) Le degré du produit de deux polynômes est la somme des deux degrés.

(D) Tout polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ possède n racines distinctes.