UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra.

Année Universitaire 2013/2014
Kénitra le 29 Juillet 2013

Concours d'entrée en première année du cycle ingénieur

Épreuve de mathématiques (durée 1h30min)

Question 1. Pour x réel, $\sin(x) + \cos(x)$ vaut :

A. $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.
B. $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.
C. $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.
D. $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

Question 2. La valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x))\, dx$ est :

A. $\frac{\pi}{4}\ln(2)$.
B. $\frac{\pi}{8}\ln(2)$.
C. $\frac{4}{\pi}\ln(2)$.
D. $\frac{8}{\pi}\ln(2)$.

Question 3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. On a :

A. $\int_0^1 (f(t))^2 dt \leq -(\min(f))(\max(f))$.
B. $\int_0^1 (f(t))^2 dt \leq -(\min(f))^2(\max(f))^2$.
C. $\int_0^1 (f(t))^2 dt \leq -(\min(f))^2(\max(f))$.
D. $\int_0^1 (f(t))^2 dt \leq -(\min(f))(\max(f))^2$.

Question 4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue , $a < b$ deux réels. $|\int_a^b f(t)dt| = \int_a^b |f(t)|dt$, si et seulement si :

A. IL existe deux fonctions $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue tels que $f(t) = \rho(t).e^{i\varphi(t)}$, pour tout $t \in [a, b]$.
B. f garde un module constant.
C. IL existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue tels que $f(t) = \rho(t).e^{i\theta}$. pour tout $t \in [a, b]$.
D. IL existe $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $f(t) = \rho(t).e^{i\theta}$. pour tout $t \in [a, b]$.

Question 5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. $|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}|$ est inferieur à :

A. $\frac{b-a}{12}\max|f''|$.
B. $\frac{(b-a)^2}{12}\max|f''|$.
C. $\frac{(b-a)^3}{8}\max|f''|$.
D. $\frac{(b-a)^3}{12}\max|f''|$.

Question 6. On pose $F(\alpha) := \int_0^1 x^{\alpha . x} dx$, on a :

A. $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}$, et le rayon de convergence de cette serie est $+\infty$.
B. $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}$, et le rayon de convergence de cette serie est 1.

C. $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}$, et le rayon de convergence de cette serie est 0.

D. $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}$, et le rayon de convergence de cette serie est $+\infty$.

Question 7. On considère la fonction $G : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos(t))dt$, on a :

A. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$, et le rayon de convergence est ∞.

B. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$, et le rayon de convergence est ∞.

C. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$, et le rayon de convergence est 0.

D. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$, et le rayon de convergence est 1.

Question 8. Pour tout $x \in R^*$, on pose $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}$. on a :

A. $e^{-(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2t^2}dt \leq e^{-n^2x^2}$ pour tout $n \in N^*$ et que $S(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}$, quand x tend vers $+\infty$.

B. $e^{-(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2t^2}dt \leq e^{-n^2x^2}$ pour tout $n \in N^*$ et que $S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{x}$, quand x tend vers $+\infty$.

C. $e^{-(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2t^2}dt \leq e^{-n^2x^2}$ pour tout $n \in N^*$ et que $S(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{x}$, quand x tend vers $+\infty$.

D. $e^{-(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2t^2}dt \leq e^{-n^2x^2}$ pour tout $n \in N^*$ et que $S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$, quand x tend vers $+\infty$.

Question 9. On pose $I := \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\, dx$, on a :

A. I est divergente.

B. I est convergente et vaut $\frac{\pi}{2e}$.

C. I est convergente et vaut $\frac{2\pi}{e}$.

D. I est convergente et vaut $\frac{\pi}{e}$.

Question 10. On pose $J := \int_0^1 [\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}]\, dx$, on a :

A. J est convergente et vaut $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$.

B. J est convergente et vaut $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$.

C. J est divergente.

D. J est convergente et vaut $\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$.

Question 11. Soit $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$.

A. $S(x) = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ seulement pour x appartenant à $[-1,+1]$.

B. $S(x) = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

C. $S(x) = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$ seulement pour x appartenant à $[-1,+1]$.

D. $S(x) = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$ seulement pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

Question 12. On pose $P_n(x) := (1-x^2)^n$ si $|x| < 1$ et $P_n(x) := 0$ si $|x| \geq 1$ puis $h_n := \dfrac{P_n}{\int_0^{+\infty} P_n(t)dt}$.

A. h_n converge uniformement vers 0 sur $[-1,1]$.

B. h_n converge uniformement vers 0 sur $[-1,-\theta]\bigcup[+\theta,+1]$ si $0 < \theta < 1$

C. h_n converge simplement vers 0 sur $[-1,1]$.

D. h_n ne converge pas uniformement sur tout sous-intervalle fermé borné et ne contenant pas 0 de $[-1,+1]$.

Question 13.

On considère la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x.e_1 + y.e_2 + z.e_3) := x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2xz - 4xy$$

(e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La signature $syn(Q)$ de Q est donnée par et il existe une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telles que :

A. $syn(Q) = (1,1)$ et $Q(x'.e_1 + y'.e_2 + z'.e_3) = 5y'^2 - 6z'^2$ pour tout x', y', z' appartenant à $\mathbb{R}$.

B. $syn(Q) = (1,1)$ et $Q(x'.e_1 + y'.e_2 + z'.e_3) = 6y'^2 - 5z'^2$ pour tout x', y', z' appartenant à $\mathbb{R}$.

C. $syn(Q) = (2,0)$ et $Q(x'.e_1 + y'.e_2 + z'.e_3) = 6y'^2 + 5z'^2$ pour tout x', y', z' appartenant à $\mathbb{R}$.

D. $syn(Q) = (0,2)$ et $Q(x'.e_1 + y'.e_2 + z'.e_3) = -5y'^2 - 6z'^2$ pour tout x', y', z' appartenant à $\mathbb{R}$.

Question 14.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n := 1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

A. $s_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $s_n \wedge s_{n+1} = (n+1)^2$ si n est pair et $s_n \wedge s_{n+1} = (\frac{n+1}{2})^2$ si n est impair.

B. $s_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $s_n \wedge s_{n+1} = (2n+1)^2$ si n est pair et $s_n \wedge s_{n+1} = (\frac{n+1}{2})^2$ si n est impair.

C. $s_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $s_n \wedge s_{n+1} = (2n-1)^2$ si n est pair et $s_n \wedge s_{n+1} = (\frac{n-1}{2})^2$ si n est impair.

D. $s_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $s_n \wedge s_{n-1} = (n+1)^2$ si n est pair et $s_n \wedge s_{n+1} = (\frac{n+3}{2})^2$ si n est impair.

Question 15.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n désigne le nombre de chiffres de n dans le système de numération de base 10. On pose $u_n := \dfrac{1}{n.p_n^\alpha}, n \in \mathbb{N}^*$. On a :

A. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 10^{p_n} < n < 10^{p_n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\ln(n))^\alpha.u_n = (\ln(10))^\alpha$.

B. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 10^{p_n-1} \leq n \leq 10^{p_n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\ln(n))^\alpha.u_n = (\ln(10))^{2\alpha}$.

C. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 10^{p_n-1} < n < 10^{p_n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\ln(n))^\alpha.u_n = (\ln(10))^{2\alpha}$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 10^{p_n-1} \leq n \leq 10^{p_n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\ln(n))^\alpha.u_n = (\ln(10))^\alpha$.