UNIVERSITÉ HASSAN 1er
École Nationale des Sciences Appliquées
BERRECHID

Concours d'entrée en 1ère année de cycle d'ingénieur, 2019-2020

Filière : Ingénierie des Systèmes d'Information et BIG DATA

Epreuve de Mathématiques

durée 3h

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul. On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

1) *Considérons $I(n) = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*
   a) *Montrer que $I(n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $I(1)$.*
   b) *Montrer que $I(n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.*
   c) *Montrer que $I(n+1) = -\frac{1}{e} + (n+1)I(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.*
2) *On considère pour tout $n \geq 2$, les fonctions g_n et h_n définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :*

$$g_n(x) = \frac{x^{1-n}e^{(1-n)x}}{\ln(n)} \qquad et \qquad h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

   a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série numérique $\sum_{n\geq 2} h_n(x)$ converge.*
   b) *Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} h_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
   c) *Etudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 2} h_n$ sur $\mathbb{R}_+$.*
   d) *Montrer que $\sum_{n\geq 2} h_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 2 *: L'objectif de cet exercice est de calculer la somme de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.*

1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} (\frac{x^2}{2\pi} - x)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.*
2. *Soit $x \in]0, \pi[$*

(a) *Vérifier que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$.

(b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

(c) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$.

3. *Soit* ψ *une fonction réelle de classe* C^1 *sur* $[0, \pi]$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) *Montrer à l'aide d'une integration par parties que*

$$\left|\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(mx)dx\right| \leq \frac{1}{|m|}\left(|\psi(0)| + |\psi(\pi)| + \int_0^{\pi} |\psi'(x)|dx\right).$$

(b) *En déduire que*

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(mx)dx = 0.$$

4. *Soit* g *la fonction réelle définie sur* $[0, \pi]$ *par*

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin(\frac{x}{2})} & si\ x \in]0, \pi], \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

Montrer que g *est de classe* C^1 *sur* $[0, \pi]$.

5. (a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin(\frac{(2n+1)x}{2})dx$

(b) *Justifier la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ *et montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$.

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice relativement à la base* B *est* A, id *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice relativement à la base* B *est* I, h *l'endomorphisme défini par* $h = f - 3id$ *et* N *la matrice de l'endomorphisme* h *relativement à la base* B.

1. *Vérifier que* : $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$. *En déduire que* $N^2 \neq 0$ *et* $N^3 = 0$.
2. *Montrer que si* λ *est valeur propre de* N, *alors* $\lambda = 0$.
3. *Etablir que* 0 *est la seule valeur propre de* h.
4. *En déduire que* f *admet 3 pour unique valeur propre*.

Pour insérer un élément en tête de liste, on considère les fonctions suivantes :

```
void fonction1(struct cell **l, int val) {
  struct cell *first = malloc(sizeof(struct cell));
  first ->val = val;
  first->next = *l;
  *l = first;
}
```

```
void fonction2(struct cell *l, int val) {
  struct cell *first = malloc(sizeof(struc
  first->val = val;
  first->next = l;
  l = first
```

5. Déterminer une base et la dimension du sous espace propre de f associé à la valeur propre 3.
6. L'endomorphisme f est il diagonalisable ? est il bijectif ?

Exercice 4 :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois continûment différentiable, $x_0, \dots, x_n$ des éléments de I deux à deux distincts. Soient $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\cdots y_n = f(x_n)$ les valeurs de la fonction f en ces points.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n unique de degré inférieur ou égale à n qui vérifie

$$P_n(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

et qui a pour expression :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \text{ où } L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \; i = 0, 1, \cdots, n.$$

Les polynômes L_i sont les polynômes de base de Lagrange associés aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$.
Le polynôme P_n s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relatif aux points x_i, $i = 0, 1, \dots, n$.
Dans la suite on note par P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relatif aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$

2. Montrer que $P_k(x) - P_{k-1}(x) = a_k(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$ avec $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et a_k est le coefficient de x^k dans P_k.
3. Déduire que

$$P_n(x) = P_0(x) + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

avec a_i est le coefficient de x^i dans le polynôme P_i pour $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Montrer que pour tout point x fixe dans $[a, b]$ il existe $\xi = \xi(x) \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi(x)$$

où $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$. (Indication : vous pouvez considérer la fonction $G(t)$ définie sur $[a, b]$ par : $G(t) = f(t) - P(t) - \frac{\Pi(t)}{\Pi(x)}(f(x) - P(x))$)