Université d'Agadir **16 juillet 2012**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Concours d'accès en 3ème année GII et GPEE
Epreuve : Mathématique (Durée : 2 heures)
Percours professionnel

Exercice 1:

On définit la fonction f, définie sur $D-\{1\}$ par : $f(x)=x\,arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1°) Calculer le développement limité en h = 0 à l'ordre 1 de $g(h)=\frac{1}{2-2h+h^2}$

2°) Soit $\phi(h)=arctg\left(\frac{1}{1-h}\right)$, déterminer $\phi'(h)$

En déduire un développement limité à l'ordre 2 de ϕ en h = 0.

3°) Déterminer le développement limité de f au voisinage de $\pm\infty$ sous la forme :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

4°) En déduire que f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 2:

Soit u l'endomorphisme de R3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A. Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de R^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases}x'(t)=-3x(t)-2y(t)-2z(t)\\ y'(t)=2x(t)+y(t)+2z(t)\\ z'(t)=3x(t)+3y(t)+2z(t)\end{cases}$$

Exercice 3:

I On considère l'équation différentielle de Bernouilli : $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)\left(y(x)\right)^{\alpha}$ où $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, a(x), b(x) et c(x) sont des fonctions continues sur I de R

1°) Montrer qu'en posant $t(x)=\dfrac{1}{\left(y(x)\right)^{\alpha-1}}$ on se ramène à une équation différentielle du 1er ordre en t(x), t'(x) et x.

II Soit l'équation différentielle $y'(x)=P(x)+Q(x)y(x)+R(x)\left(y(x)\right)^2$ (E) (Equation de Riccati), où P, Q et R sont des fonctions continues sur un intervalle I de R.

1°) En posant :

$$y(x)=-\frac{1}{R(x)F(x)}\frac{dF(x)}{dx}$$

Montrer que l'équation différentielle vérifiée par F(x) est :

$$F''(x)-\left(\frac{R(x)'}{R(x)}+Q(x)\right)F'(x)+R(x)P(x)F(x)=0$$

2°) Montrer que si $y_1(x)$ est une solution particulière de (E), le changement de variable $y(x)=z(x)+y_1(x)$ ramène l'équation (E) à une équation de Bernoulli en z.

3°) Résoudre :

$$y'(x)=-2x+\left(1+\frac{1}{x}\right)y(x)+\frac{1}{x}\left(y(x)\right)^2 \qquad (*)$$

Par l'une des méthodes (question II-1 et II-2) Sachant que $y_1(x)=x$ est solution particulière de (*).