Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Agadir

Lundi 20 Juillet 2009

Concours d'accés en 3ième année
Epreuve de Mathématique
DUT
Durée 2 heures

Exercice 1 :

Soit la matrice carrée $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$ (où I est la matrice d'application identique).
3. Calculer $\Gamma(t).\Gamma(-t)$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t)$ est une matrice inversible.
4. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\Gamma(s).\Gamma(t) = \Gamma(s+t)$.
5. Montrer que $\Gamma : t \to \Gamma(t)$ est un morphisme injectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_3(\mathbb{R}, \times)$.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes, muni de la base canonique : $\mathcal{B} = \left\{ K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Soit $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et soit $\Phi(A) = H^{-1}AH$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Calculer explicitement $\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ et $\Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.
3. Donner les matrices de Φ et Φ^{-1} dans la base canonique de $\mathcal{B}$ de E.

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle: $y' + 3y = e^{-t}cos(t)$ (1).

1. On cherche les solutions sous la forme $y(t) = z(t)e^{-3t}$.
   Montrer que $z'(t)e^{-3t} = e^{-t}cos(t)$.
2. En déduire que $z = \int e^{2t}cos(t)dt$.

3. Calculer la primitive la plus générale de $t \mapsto e^{2t}cos(t)$ et en déduire la solution générale de (1).

Exercice 4 :

Soit f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par: $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1. Développer en série entière $e^{-\frac{x^2}{2}}$ et en déduire par intégration le développement en série entière de $f(x)$. Quel est le rayon de convergences de cette série entière ?.

2. On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $f(\frac{1}{2})$.

   (a) Exprimer ce nombre comme somme d'une série à l'aide de 1) et montrer qu'il s'agit d'une série alternée.

   (b) On pourra admettre que: $(u_n)_{n\geq 0}$ positive décroissante $\Longrightarrow \left|\sum_{p+1}^{\infty}(-1)^n u_n\right| \leq u_{p+1}$. Montrer que le reste d'ordre 1 de la série trouvée en (a) est inférieur à 10^{-3}, et en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $f(\frac{1}{2})$.