



Concours DEUG et Licence pour l'admission en première année de l'EMI (2023-2024)

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Vendredi 14 juillet 2023

Durée 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document

L'épreuve comporte deux parties indépendantes à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages : 6

Analyse

Partie A

Pour tout nombre réel s , on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre suivante :

$$(E_s) \quad (1-x^2)y''(x) - 2(s+2)xy'(x) - 2(s+1)y(x) = 0$$

On note f_s la solution de (E_s) sur $] -1, +1[$ qui vérifie les conditions initiales $f_s(0) = 0$ et $f'_s(0) = 1$.

- A.1. Soit g_s la fonction définie sur $] -1, +1[$ par $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.
- A.1.1. Montrer que g_s est solution de (E_s) sur $] -1, +1[$.
- A.1.2. Calculer $g_s(0)$ et $g'_s(0)$. En déduire que f_s est impaire.
- A.2. Déterminer en fonction de s l'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto (1-x^2)^\alpha$ soit solution de (E_s) sur $] -1, +1[$.
- A.3. Soit u_s la fonction définie sur $] -1, +1[$ par $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$.
- A.3.1. Montrer que la dérivée u'_s de u_s est solution sur $] -1, +1[$ de l'équation différentielle :

$$(E'_s) \quad (1-x^2)y'(x) + 2sxy(x) = 0.$$

- A.3.2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E'_s) sur $] -1, +1[$.
- A.3.3. Calculer $u'_s(0)$ et $u_s(0)$. En déduire que $u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$ pour tout $x \in] -1, +1[$.

A.4. Soit y une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I . On note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de y sur I .

A.4.1. Montrer que pour que y soit solution de (E_s) sur I , il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} c_n.$$

- A.4.2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de c_n en fonction de n et c_0 .
- A.4.3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ l'équation (E_s) admet-elle des solutions polynomiales impaires non identiquement nulles ?

A.4.4. On suppose que $s \notin \{-n - \frac{3}{2}; n \in \mathbb{N}\}$, que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ est solution de (E_s) sur I , et que $c_0 \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$.

A.5. Dédurre des questions précédentes que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s + 2k + 1) \right] x^{2n+1}.$$

A.6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}},$$

où Q_p est une fonction polynomiale impaire de degré $2p+1$ que l'on explicitera. Expliciter en particulier $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$.

Partie B

On note $J =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in J$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

- B.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , les fonctions f_n sont intégrables sur J
- B.2. calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Que vaut alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (\int_0^{+\infty} f_n(x) dx)$?
- B.3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur J .
- B.4. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur J . Que vaut alors $\int_0^{+\infty} (\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)) dx$?
- B.5. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx)$.

Partie Algèbre

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n , on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble $\{l \in \mathbb{N} / 1 \leq l \leq n\}$;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

Une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si $(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})), {}^t X A X \geq 0$.

Une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si $(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}), {}^t X A X > 0$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$ (respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{+,*}$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels symétriques positives (respectivement définies positives).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et, pour tout entier naturel m , on note $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m .

On rappelle que toute matrice réelle symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ diagonalise sur une base orthonormée. C'est à dire $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $A = P \Delta {}^t P$.

I — Caractérisation des matrices symétriques définies positives

Le but de cette partie est de caractériser les matrices symétriques réelles définies positives, à l'aide des propriétés de leurs matrices extraites.

I.A - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- I.A.1)** Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension et une base.
- I.A.2)** $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{+,*}$ sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?, justifier.
- I.A.3)** Montrer que M est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
- I.A.4)** Montrer que M est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

I.B - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note

$A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A , constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A . Autrement dit, si $A = (a_{s,t})_{1 \leq s,t \leq n}$, on a $A^{(i)} = (a_{s,t})_{1 \leq s,t \leq i}$. On

note également $X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{i,1}(\mathbb{R})$

Par exemple pour $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 1 & (-2) & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 2 \\ 10 & 8 & 9 & 2 & (-2) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5(\mathbb{R})$, on a $B^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & (-2) & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A^{(i)}) > 0.$$

I.B.1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{H}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

I.B.2) On prend, dans cette question, $n = 2$, montrer que toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{H}_2$ est définie positive.

I.B.3) Soit $n \geq 2$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{H}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

a) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

c) Conclure.

I.C - Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A^{(i)}) \geq 0 \text{ ? , justifier.}$$

II — Étude d'une suite de polynômes

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

II.A - Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II.B - On note $T_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de T_n .

Montrer que le degré de $T_n^{(n)}$ est égal à n et calculer $T_n^{(n)}(1)$.

On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{T_n^{(n)}(1)} T_n^{(n)} \end{cases}$$

II.C - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n \rangle = 0$.

Indication : on pourra intégrer par parties et passer par les éléments d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.D -

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \int_0^1 T_n(u) du$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

II.D.2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{1}{2n+1}$.

II.E - Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif;
- ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Justifier l'unicité d'une telle famille.

II.F - Calculer K_0, K_1 et K_2 .