CONCOURS D'ADMISSION
EN PREMIÈRE ANNÉE
DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE
MATHÉMATIQUES

Vendredi 15 juillet 2022
Durée :3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'usage de la calculatrice et aussi interdit.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte **deux parties indépendantes** à rédiger sur des feuilles s'éparées

Scanné avec CamScanner

PARTIE 1 : ALGÈBRE

Exercice 1

Soit $M_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels. On note I_p la matrice identité de $M_p(\mathbb{R})$. Si $M \in M_p(\mathbb{R})$, la trace de M est notée $Tr(M)$, sa transposée est noté $M^\top$ et π_M représente son polynôme minimal.

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$, et soit n un entier naturel ≥ 2. On pose $\beta = a - b$ et $\gamma = a + (n-1)b$.

On considère deux matrices A, D de $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

1. Préciser le rang de la matrice $A - \beta I_n$
2. Déduire que β est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$
3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T DP$
4. Calculer le déterminant de la matrice A. Sous quelle condition sur a et b, la matrice A est inversible ?
5. Préciser le polynôme minimal de A puis déduire l'expression de l'inverse de A, si elle est inversible, en fonction de A et I_n
6. On suppose que β et γ sont positifs ou nuls, donner une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles, telle que $A = S^2$

Exercice 2

Soient les deux matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associées.

2. Soient $e_1' = (1,2,1), e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (1,1,1)$; Vérifier que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1', e_2', e_3'). Justifier que P est inversible, puis calculer la matrice produit $D = P^{-1}AP$

4. On considère la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ des matrices, à trois lignes et une colonne, définies par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+2} = A\, X_{n+1} + BX_n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ soit } Y_n = P^{-1} X_n \text{ avec } Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   a. Calculer la matrice produit $D_1 = P^{-1}BP$, Y_0 et Y_1
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+2} = D\, Y_{n+1} + D_1 Y_n$
   c. Déduire que $\forall n \in N,\ u_{n+2} = u_{n+1},\ v_{n+2} = 4v_n$ et $w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n$
   d. Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n
   e. Donner l'expression explicite de X_n en fonction de n.

5. On considère trois fonction u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles :

$$(1) = \begin{cases} u'(t) = 8u(t) + 4v(t) - 16w(t) \\ v'(t) = 4v(t) - 8w(t) \\ w'(t) = 4u(t) + 4v(t) - 12w(t) \end{cases}$$

   a. Justifiez que, pour tout réel t, il existe un unique triplet $(x(t), y(t), z(t))$ de réels tel que $\big(u(t), v(t), w(t)\big) = x(t)e_1' + y(t)e_2' + z(t)e_3'$
   b. Exprimer les fonctions x, y et z en fonction de u, v et w, puis déduire qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$
   c. Montrer que le système d'équations différentielles (1) équivaut au :

$$(2) = \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 4y(t) \\ z'(t) = -4z(t) \end{cases}$$

   d. On suppose $u(0) = 1$ et que $v(0) = w(0) = 0$; calculer $x(0), y(0)$ et $z(0)$
   e. Résoudre le système (2) avec les conditions initiales trouvées à la question précédente
   f. Déduire la solution du système (1) avec les conditions initiales données précédemment

Scanné avec CamScanner

Partie Analyse : à rédiger sur une feuille à part

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure algébrique usuelle d'espace vecoriel. On considère la norme $\| \|_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\| (x,y) \|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Pour toute fonction f admettant des dérivées partielles en un couple (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, on appelle vecteur gradient de f en (x_0,y_0) le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(x_0,y_0)$ dont le couple des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.
Pour toute fonction f admettant des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ en un couple (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, on appelle Laplacien de f en (x_0,y_0) le nombre réel $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.
On rappelle que tout polynôme P non nul à coefficients réels et à deux indéterminées Xet Y, peut s'écrire d'une manière unique sous la forme
$P(X,Y) = a_0(Y) + a_1(Y).X + a_2(Y).X^2 + \dots\dots + a_N(Y).X^N$ où $a_i(Y) \in \mathbb{R}[Y]$ pour tout $i \in \{0,\dots\dots,N\}$ et $a_N(Y) \neq 0_{\mathbb{R}[Y]}$. N s'appelle degré de P par rapport à l'indéterminée X . On le note $deg_X(P)$.
On considère l'ensemble $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$. Pour tout $(x,y) \in G$, on pose $C(x,y) = \frac{y}{\pi.(x^2+y^2)}$.

1-a) Vérifier que G est une partie ouverte, non fermée dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$ et que l'adhérence de G est $\overline{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$.

1-b) Vérifier, également, que pour tout $y > 0$, la fonction $C(.,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} C(x,y) = 1$.

1-c) Démontrer soigneuesement que la fonction C est de classe C^∞ sur G et donner les coordonnées du vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla} C(x,y)$ de C en (x,y) pour tout $(x,y) \in G$.

1-d) Vérifier que $\triangle C(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in G$.

Pour tout $m,n \in \mathbb{N}$ et tout $(x_0,y_0) \in G$, on pose $C^{(m,n)}(x_0,y_0) = \frac{\partial^{m+n} C}{\partial x^m \partial y^n}(x_0,y_0)$.

2) Démontrer que pour tout $m,n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_{m,n} \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que $deg_X(P) \leq 2.(m+n)$ et $C^{(m,n)}(x,y) = \frac{P_{m,n}(x,y)}{(x^2+y^2)^{n+m+1}}$ pour tout $(x,y) \in G$.

Dans toute la suite, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ étant muni de sa norme usuelle.

3) Montrer que pour tout $(x,y) \in G$, la fonction $t \longmapsto f(t).C(x-t,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note alors, dans toute la suite, $\Phi_f(x,y)$ le nombre complexe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).C(x-t,y)\,dt$.

4) Montrer que la fonction $\Phi_f : (x,y) \longmapsto \Phi_f(x,y)$ est continue et bornée sur G.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Scanné avec CamScanner

muni de la norme $\|\|_\infty$ définie par $\| g \|_\infty = \underset{t\in\mathbb{R}}{Sup} \mid g(t) \mid$ pour tout $g \in E$.

On note F l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|\|_{\infty,2}$ définie par $\| h \|_{\infty,2} = \underset{(x,y)\in G}{Sup} \mid h(x,y) \mid$ pour tout $h \in F$.

On munit l'espace vectoriel $L_C(E,F)$ des applications linéaires continues de $(E, \|\|_\infty)$ dans $(F, \|\|_{\infty,2})$ de sa norme usuelle $||| \; |||$ définie par $||| \varphi ||| = \underset{g\in E\setminus\{0\}}{Sup} \left(\frac{\|\varphi(g)\|_{\infty,2}}{\|g\|_\infty} \right)$ pour tout $\varphi \in L_C(E,F)$.

5) Donner, sans aucune preuve, trois autres expressions de $||| \varphi |||$ pour $\varphi \in L_C(E,F)$.

6) Montrer que $\Phi : f \in E \longmapsto \Phi_f$ est un élémément de $L_C(E,F)$ et déterminer $||| \Phi |||$.

7) Vérifier que la fonction Φ_f définie dans 4) est de classe C^∞ sur G et calculer $\triangle \Phi_f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in G$.

8) Montrer que, pour tout réel $a > 0$, Φ_f est uniformément continue sur $H_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq a\}$.

9) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $(x,y) \in G$,

$$\begin{cases} \mid x - x_0 \mid < \eta \\ y < \eta \end{cases} \Longrightarrow \mid \Phi_f(x,y) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

Donner une expression explicite admissible de η.

Scanné avec CamScanner