UNIVERSITE MOHAMMED V DE RABAT
ECOLE MOHAMMADIA D'INGENIEURS

جامعة محمد الخامس بالرباط
المدرسة المحمدية للمهندسين

CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIRE ANNE

DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Lundi 15 juillet 2019

Durée 3 heures

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages : 5

PARTIE I : ANALYSE

I- Des séries convergentes

Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels et $(b_n)_{n\in N}$ une suite de nombres complexes.

Pour tout $n \in N$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1) Montrer que pour tout $n \in N^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}).B_k + a_n.B_n$.

2) On suppose que la suite $(a_n)_{n\in N}$ est décroissante . la suite $(B_n)_{n\in N}$ est bornée et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2-1) Vérifier que la série $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge , en déduire la convergence de la serie $\sum a_n.b_n$.

2-2) Enoncer le théorème de convergence des séries numériques alternées et démontrer le en appliquant le résultat du 2-1) avec bien évidemment un bon choix des suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$.

3) Application 1: Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

3-1) Pour tout $n \in N^*$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}.\frac{\sin(n.\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

3-2) Discuter alors, en fonction du réel α et en appliquant soigneusement les résultats du 2-1), la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4) Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on pose $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite on pose $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

5) Application 2: Soit $\gamma \in]0, +\infty[$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \left[\exp\left(\frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right) - 1\right]$ converge si et seulement si $\gamma > \frac{1}{2}$. (Essayer de vous ramener aux séries alternées).

6) Application 3: Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 2} s_n$ où $s_n = \prod_{j=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}}\right)$ pour tout $n \geq 2$.

II- Convergence uniforme

On prend toujours $(a_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels .

On suppose que $(a_n)_{n\in N}$ est décroissante et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions définies de A dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $(n, z) \in N \times A$, on pose $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $(\forall (n, z) \in N \times A) \quad | F_n(z) | \leq M$.

1-1) Montrer que la suite de fonctions $(a_n.F_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1}).F_n$ converge normalement sur A.

1-2) Déduiser en à laide de la question I.2-1) que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n.f_n$ converge uniformément sur A.

2) Une application: Soit $a \in]0,\pi[$.

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$.

Que dire de la continuité de u sur $]0, 2\pi[$? justifier.

3) Pour tout $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n^{(p)}(x) = \dfrac{\sin(nx).\sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n^{(p)}$, converge uniformément sur l'intervalle $[0,\pi[$.

III- Applications sur les séries entières

On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

On considère la série entière complexe $\sum a_n z^n$.

1) On note R le sup dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{r \geq 0 / a_n r^n$ *est bornée dans* $(\mathbb{C}, |\ \ |)\}$.

Montrer que pour tout $r < R$ la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $D_f(0,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq r\}$.

Dans la suite le candidat peut utiliser les résultats du cours sur les séries entières.

2) On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$.

2-1) Rappeler en le justifiant la valeur du rayon de convergence R de cette série entière.

2-2) Montrer que la série entière réelle $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Que peut on déduire pour la convergence uniforme de la série entière complexe $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$? justifier.

2-3) Pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \ et\ Re(z) \leq \cos(\alpha)\}$.

Vérifier que D_α est un compact de $(\mathbb{C}, |\ \ |)$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$, représenter géométriquement les points M dont les affixes appartiennent à $D_{\frac{\pi}{3}}$ dans un repère orthonormé du plan.

2-4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in D(0,1)$, on note $F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et tout $z \in D_\alpha$, on a $|F_n(z)| \leq \dfrac{2}{1-\cos(\alpha)}$.

2 5) En déduire que pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la série entière complexe $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α.

PARTIE II : ALGÈBRE.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^t est sa matrice transposée, rang (A) son rang et Tr (A) sa trace, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^tAX \geq 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$O_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^tM = I_n$.

I. Exercice préliminaire

1°). Soit la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on pose } = \Gamma^t\Gamma = H.$$

Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$

2°) On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in O_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3°). Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A \mid B) = Tr(A^tB)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\| A \| = (A \mid A)^{1/2}$

Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A, \Pi) = \inf\limits_{M \in \Pi} \| A - M \|$.

4°). Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5°). Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \| 1/2(A - A^t) \|$ et déterminer de meme $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6°). Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $O_n(\mathbb{R})$.

A. Théorème de la décomposition polaire

7°) . Montrer qu'une matrice S de $S_n(\mathbb{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8°) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que la matrice $A^tA \in S_n^+(\mathbb{R})$.

9°) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ à termes positifs telle que $A^tA = D^2$. On note $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer $A_i^tA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, \cdots, E_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^tY$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10°). Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^tA = B^tB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11°) Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

(Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $S_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $O_n(\mathbb{R})$)

B. Calcul de $d(A, O_n(\mathbb{R}))$

12°). Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$, $\| M\Omega \| = \| \Omega M \| = \| M \|$.

13°). Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$, $\| A - \Omega \| = \| S - U^{-1}\Omega \|$ et en déduire que $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))$.