CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIÈRE ANNÉE

DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Vendredi 13 juillet 2018

Durée 3 heures

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte **deux problèmes indépendants** à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages (celle-ci non comprise) : **4**

Scanned by CamScanner

PARTIE I : ANALYSE.

A propos de l'hypothèse de classe C^1 par morceaux du théorème de convergence normale d'une série de Fourier $\cdots$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et de période 2π, on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$a_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

On rappelle le théorème de convergence normale :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de période 2π et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction f est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$.
Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse de classe C^1 par morceaux .
Une première partie démontre des résultats préliminaires. Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse de classe C^1 par morceaux , la série de Fourier peut diverger.

I. Résultats préliminaires

1. Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction f n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

   a. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.

   b. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

2. On considère la fonction continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π , paire et définie pour $x \in [0, \pi]$, par $\phi(x) = \sqrt{x}$. Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$..

3. Théorème de Cesàro.

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge vers le complexe l.

a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.

b. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}\right)$ converge vers l.

4. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée

Scanned by CamScanner

$S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n, notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f) + S_f(1) + \cdots S_n(f)\right)$$

On démontre, et nous l'admettrons, *le théorème de Fejér* : La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Une application :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction f.

5. Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq d_n$, (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geq n\})$ convient).

II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout entier naturel non nul n par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\dfrac{x}{2}\right]$.

6. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

7. On pose, pour p et k entiers naturels, $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) dt$ et, pour q entier naturel, $T_{q,k} = \sum\limits_{p=0}^{q} I_{p,k}$.

a. Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

b. Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,p} = c_k + \sum\limits_{j=k-q}^{k+q} \dfrac{1}{2j+1}$ et en déduire que, pour tout couple (q, k) d'entiers naturels, $T_{q,k} \geq 0$.

c. Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1}$.

d. En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \approx \dfrac{1}{2}\ln k$.

8. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} I_{p,2^{n^3}-1}$.

9. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geq \dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3}-1,2^{p^3}-1}$

Scanned by CamScanner

PARTIE II : ALGÈBRE

Exercice

On donne n réels $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tels que $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$

et la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & a_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_3 & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

1) Calculer $det A_n$.

√ 2) Montrer que $\lambda \in Sp(A_n) \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$

√ 3) A_n est-elle diagonalisable ?

Indications : On peut étudier la fonction $f : t \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{t + a_i}$ définie dans la question 2, et utiliser ses propriétés sur les intervalles :
$I_0 =]-\infty, -a_n[$, $I_1 =]-a_n, -a_{n-1}[$, $\ldots$, $I_{n-1} =]-a_2, -a_1[$, $I_n =]-a_1, +\infty[$.

Problème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, B et C deux parties de E.

$F_1, \ldots, F_n$ des sous espaces vectoriels de E, $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E, $F = F_1 + \cdots + F_n$ et $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1) Montrer que $Vec(B \cup C) = Vec(B) + Vec(C)$
2) Montrer que $Vec(A) = Vec(A_1) + \ldots \cdots + Vec(A_n)$.

3) Montrer que, dans le cas où $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ et $A_i \subset F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, il y a équivalence des deux propositions :

Scanned by CamScanner

(i) A_i est génératrice (resp. une partie libre ; une base) de F_i $(i = 1, \ldots, n)$;
(ii) A est génératrice (resp. une partie libre ; une base) de F.

Soit W un espace vectoriel et $u : E \to W$ une application linéaire, $A \subset E$, $B \subset E$, $H \subset E$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

4) Montrer que $Vec(u(A)) = u(Vec(A))$. En déduire que, si H est un sous-espace vectoriel de E, $u(H)$ est un sous-espace vectoriel de W.

5) Montrer que : $[W = Vec(u(A))] \implies [u \texttt{ est surjective}]$.

6) Montrer que :

$$[(u(x_i))_{i\in I} \texttt{ est libre }] \implies [(x_i)_{i\in I} \texttt{ est libre et } Vec(\{x_i; i \in I\}) \cap keru = \{0\}].$$

7) On suppose que u est injective. Montrer que :

$$[H = Vec(A) \texttt{ (resp. } H \texttt{ est un sous-espace vectoriel de E de base B)}] \iff [u(H) = Vec(u(A)) \texttt{ (resp. } u(H) \texttt{ est un sous-espace vectoriel de } W \texttt{ de base } u(B))\ ].$$

Applications :

a) Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u((\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = (\alpha - \beta, \alpha - \gamma, \alpha - \delta)$.
Montrer que u est linéaire et $\mathbb{R}^4 = Vec(\{(2,1,2,2), (2,2,1,2), (2,2,2,1)\}) \oplus keru$.

En déduire que $\{(2,1,2,2), (2,2,1,2), (2,2,2,1), (1,1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

b) Soit $n \in N^*$. Pour tout $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et tout $S \subset \mathbb{C}^n$, on pose
$\bar{x} = (\bar{\alpha_1}, \ldots, \bar{\alpha_n})$ et $\bar{S} = \{\bar{x}; x \in S\}$.
Montrer que l'application $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par $u(x) = \bar{x}$ est linéaire bijective.
Montrer, pour $S \subset \mathbb{C}^n$ et $G \subset \mathbb{C}^n$, qu'il y a équivalence entre les propositions :

(i) $G = Vec(S)$ (resp. G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de base S ; $m = rang\, S$);
(ii) $\bar{G} = Vec(\bar{S})$ (resp. $\bar{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de base $\bar{S}$;

Scanned by CamScanner

ECOLE MOHAMMADIA D'INGENIEURS المدرسة المحمدية للمهندسين

CONCOURS D'ADMISSION

EN PREMIERE ANNEE

D.E.U.G. ET LICENCE

EPREUVE DE PHYSIQUE

13 Juillet 2018

Durée 3 heures

L'épreuve comporte deux parties indépendantes à rédiger sur des feuilles séparées
Nombre de pages (celle-ci non comprise) : 2

Scanned by CamScanner

Partie I

Un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ porté par l'axe Oz de vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est placé dans le vide au point O. On pose : $\vec{M} = M\vec{e}_z$, où M est une constante. Le champ magnétique engendré par ce dipôle en un point P éloigné de O, repéré par $r = OP$ et $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OP})$, s'écrit :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{grad}\frac{\vec{M}.\overrightarrow{OP}}{r^3}$$

1. Calculer le module de $\vec{B}$ en fonction de M, r, et θ.
2. Déterminer le lieu des points de l'espace où le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à l'axe Oz. Donner le module de $\vec{B}$ en un de ces points, en fonction de M et r.
3. On considère une calotte sphérique (centrée sur O) ayant pour base un cercle situé dans un plan orthogonal à Oz, de rayon R et de centre O' situé à la distance $d = OO'$ de O. Déterminer le flux de $\vec{B}$ à travers cette calotte, en fonction de M, d, et R.

   Lorsque $R \ll d$, montrer que ce flux peut être approximé par : $\frac{\mu_0 M}{2}\frac{R^2}{d^3}$.
4. a) Montrer que l'équation d'une ligne de champ quelconque est de la forme : $r = r_0\, sin^2\theta$ où r_0 est une constante.

   b) Donner l'équation d'une ligne de champ passant par le point P_0 situé dans le plan contenant O et perpendiculaire à Oz à la distance D de O, en fonction de D et θ.
5. Application : On considère que le champ magnétique terrestre est celui d'un dipôle magnétique placé au centre O de la Terre considérée comme une sphère de rayon R_T, de moment magnétique $\vec{M}$ orienté suivant l'axe NS des pôles magnétiques.

   a) En prenant $D = 4R_T$, construire la ligne de champ passant par P_0 en s'aidant des points correspondant à quelques valeurs particulières de θ, pour lesquelles on donnera r en fonction de R_T. Choisir une échelle convenable.

   b) Donner θ correspondant au point P'_0 intersection de la ligne de champ précédente et de la sphère terrestre. Montrer ce point sur la figure précédente.

   Calculer le module de $\vec{B}$ en ce point. Calculer la composante horizontale (horizon local) de $\vec{B}$ en ce point.

   c) La mesure de cette composante donne la valeur 1.21×10^{-4} T. En déduire la valeur de M en en précisant l'unité. On donne $R_T = 6370$ km et $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ SI.

NB: Dans toute cette partie, on donnera les angles, le cas échéant, en degrés et minutes

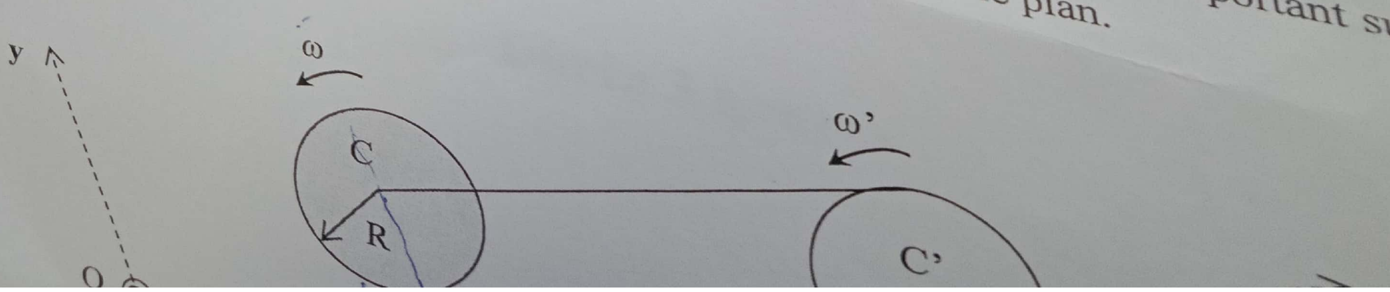
Scanned by CamScanner

Partie II

On considère un disque plein homogène de centre C, de rayon R et de masse M qui roule sans glisser, tout en restant vertical, sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale. Le centre du disque est relié à une masse m par un fil inextensible sans masse, qui passe (sans glisser) par une polie de centre C'et de rayon R.

Le disque et la poulie peuvent tourner sans frottement autour de leurs axes et on notera J et J' leurs moments d'inertie respectifs. On notera ω la vitesse angulaire du disque et ω' celle de la poulie. Le système est initialement immobile.

1) Déterminer le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe Cz en fonction de M et de R.
2) Montrer que $\omega = \omega'$.
3) Soient T_1 et T_2 les forces de tension exercées par le fil respectivement sur le disque et la masse m. En appliquant le théorème du moment cinétique à la poulie, établir une relation entre ces deux forces.
4) Etablir l'équation du mouvement du disque en fonction de M, m, J, J', R et α.
    a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.
    b) En utilisant une approche énergétique.
5) A quelle condition (reliant m, M et α) le disque peut il monter ?
6) Dans la suite, on suppose que $J' = 0$ (polie idéale) et que $M = m$. On notera f, le coefficient de frottement statique du disque sur le plan. Etablir la condition portant sur l'angle α, nécessaire pour que le disque monte sans glisser sur le plan.



Scanned by CamScanner