CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIÈRE ANNÉE

DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Vendredi 14 juillet 2017

Durée 3 heures

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte **deux problèmes indépendants** à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages (celle-ci non comprise) : **5**

PARTIE I : ANALYSE.

Étude et calcul des intégrales $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$.

Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad \Sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

1°).

$a)$ Calculer pour tout t, $(S_n + i\Sigma_n)(t)$, $(i^2 = -1)$.

$b)$ En déduire alors, $S_n(t)$.

$c)$ Calculer la valeur $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$.

2°).

$a)$ Démontrer que la fonction définie sur $[0 , \pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \end{cases} ,$$

est continue et dérivable.

$b)$ Montrer que sa dérivée f' est bornée sur son intervalle de définition.

3°).

$a)$ Montrer que la fonction f et sa dérivée f' vérifient l'égalité :

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt = \frac{2}{2n+1} + \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt$$

$b)$ En déduire alors un majorant pour l'intégrale du premier membre de l'équation.

$c)$ Qu'en déduit-on lorsque n tend vers $+\infty$?

4°).

$a)$ Donner les variations de la fonction :

$$f^* : t \longrightarrow \frac{\sin t}{t} \quad \text{sur} \quad \left]0 \, , \, \frac{\pi}{2}\right[$$

$b)$ En déduire alors les inégalités :

$$\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2} dt \leq \frac{\pi}{2}$$

5°).

a) Justifier pour $x > 0$, l'égalité suivante :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

b) Etudier ensuite la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

6^o).

a) Montrer, en le justifiant avec soin, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^{+\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t} dt$$

b) En déduire alors la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

7^o).

a) Étudier, pour $m \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx.$$

b) Calculer pour tout m réel :

$$A(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx.$$

8^o).

a) Soient a et b deux réels différents. Montrer qu'il existe un réel c, tel que la fonction k définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x > 0, \quad k(x) = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \quad \text{et pour} \quad x = 0, \; k(x) = c$$

soit continue sur $\mathbb{R}^+$ et donner alors la valeur de c.

b) Etablir la convergence de l'intégrale impropre :

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx.$$

c) Calculer $I(a, b)$ en fonction de $\mid a \mid$ et $\mid b \mid$.

PARTIE II : ALGEBRE

Soit $E = R^3$, E est un espace vectoriel euclidien muni de la base orthonormée (i, , j, k).

Dans E : Le produit scalaire sera noté par $<x, y>$, le produit vectoriel sera noté par $x \wedge y$

et la norme par $\| x \|$.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E, et D l'axe orienté par u.

Pour tout réel λ non nul on notera f_λ l'endomorphisme de E qui à x associe $f_\lambda(x)$ avec

$f_\lambda(x) = x + \lambda <x, u> u$

1) Montrer l'existence d'une base orthonormée (u, v, w) et donner la matrice de f_λ dans cette base.
2) Déterminer le noyau et l'image de f_λ
3) Pour quelle valeur de λ, f_λ est une projection orthogonale ?
4) Pour quelle valeur de λ, f_λ est un endomorphisme orthogonal ? On notera cette valeur λ_0.
5) Quelle est la nature de f_{λ_0}
6) Donner la matrice de f_{λ_0} dans la base (i, j, k).

Soit g l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ dans la base (i, j, k). On suppose que g est une rotation vectorielle.

7) i- Calculer ab+ac+bc et a+b+c. vous pouvez vérifier les égalités suivantes :

$$\det(g) = a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

ii- Montrer que a, b et c sont les trois racines d'une équation de type $x^3 - x^2 + p = 0$. Exprimer p en fonction de a, b et c.

8) Soit l'équation $x^3 - x^2 + p = 0$, à quelle condition sur p cette équation a –t-elle trois racines réelles ?

9) Montrer que dans ce cas g est une rotation.

10) Dans le cas particulier $b = c$ déterminer l'axe et l'angle de la rotation précédente.

Soit r la rotation vectorielle d'axe D et d'angle θ.

11) Montrer que pour tout vecteur x de E on a :

$$r(x) = \langle x, u \rangle u + \cos\theta\,((u \wedge x) \wedge u) + \sin\theta\,(u \wedge x)$$

12) Réciproquement, montrer que pour tout vecteur unitaire u et pour tout réel θ la relation précédente définit une rotation.