CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIÈRE ANNÉE

DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Vendredi 14 juillet 2016

Durée 3 heures

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte **deux problèmes indépendants** à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages (celle-ci non comprise) : 5

PARTIE A :ANALYSE

1. Autour de la fonction zeta altérnée de Riemann

Objectifs: On note F la fonction zeta alternée de Riemman définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et la fonction zeta de Riemann définie sur $]1;+\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

1°). Déterminer l'ensemble de définition de F.

2°). On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n>1}$ définie sur $[0;1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3°). Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2;+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4°). *Dérivabilité de F*

(a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera

(b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.

5°). *Lien avec ζ.*

Calculer, pour $x \geq 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

puis en déduire la limite de c en $+\infty$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rapelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} C_n$ où $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} C_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ par elle même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6°). *Étude de la convergence*

(a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme en fonction de F de la série produit $\sum_{n\geq 2} C_n(x)$, lorsque $x > 1$.

(b) Démontrer que pour $x > 0$, $|C_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire pour $0 < x < 1/2$, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} C_n(x)$

7°). *Cas où $x = 1$*

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$

En déduire une expression de $C_n(x)$ en fonction $\frac{H_{n-1}}{n}$ où

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$$

(somme partielle de la série harmonique).

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} C_n(x)$

PARTIE II : ALGEBRE

I

Soit n supérieur ou égal a 2 Si $A = (\alpha_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ on note

$$l_i(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}, \qquad c_j(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j}$$

Et:

$$d(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,k}, \qquad \alpha(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n+1-k}$$

(a) Montrer que l'ensemble N_0 des matrices A vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2$.

(b) Montrer que l'ensemble N des matrices A vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A)$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 + 1$.

(c) Montrer que pour $n \geq 3$ l'ensemble M_0 des matrices A vérifiant :

$$d(A) = c\ (A) = 0 \quad et \quad \forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 - 2$.

(d) Montrer que pour $n \geq 3$ l'ensemble M des matrices A vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = d(A) = \alpha(A)$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 - 1$.

II

On dit que l'endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimention finie n sur un corps IK quelconque est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E.

tel que $(u_k(x_0))_{k\geq 0}$

ON note M le polynome minimal de u

(a) Montrer que l'application $P \mapsto P(u)(x_0)$ de $\mathbb{K}[X]$ sur E est linéaire, surjective et de noyau l'idéal (M). En déduire que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice compagnon associée à M.

(b) Montrer que l'application :

$$I \mapsto F_I = \{R(u)(x_0) | R \in I\}$$

est une bijection de l'ensemble des idéaux I de $\mathbb{K}[X]$ contenant M sur l'ensemble des sous-espace stables par u de E. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces stables par .

(c) Montrer que les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ stables par l'endomorphisme u, canoniquement associé à la matrice triangulaire supérieure :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

sont de la forme $Im\, u^k$ pour $k \in [0, n]$.

Nb : On rappelle que la matrice compagnon associée à un polynôme unitaire

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$