Concours d'Accès en Première Année

Epreuve de Mathématiques

13/07/2023 à 09h

Durée : 3 h

L'usage de calculatrices est interdit

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend trois pages.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées).

Le sujet comporte quatre parties indépendantes.

PARTIE I

1. On considère :

- Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$

- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 < +\infty$

Vérifier que la fonction $x \to D_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(a_n - x)^2$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et atteint son minimum.

Déterminer ce minimum.

2. On considère une fonction f continue réelle de carré intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

Vérifier que la fonction $x \to D_f(x) = \int_0^1 (f(t) - x)^2 dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et atteint son minimum.

Déterminer ce minimum.

PARTIE II

Soit x un nombre réel strictement positif. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$.

1. Que vaut $\int_u^v t^{x-1}dt$?

2. Justifier que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge absolument. Quelle est sa valeur ?

3. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

4. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

5. On suppose que $x \in [u, v]$.

   a. Justifier que $|(ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}| \leq (ln(t))^2 t^{u-1}$, pour tout t dans $]0,1]$.

b. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

6. Soit F l'application définie, pour x nombre réel strictement positif, par :

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

Démontrer que F définit une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde. On citera explicitement le théorème utilisé.

7. Déterminer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $(ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t/2}$.

8. En déduire que :

a. L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

b. L'intégrale $\int_1^{+\infty} ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

c. L'intégrale $\int_1^{+\infty} (ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

9. Soit G l'application définie, pour x nombre réel strictement positif, par :

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Démontrer que G définit une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde.

PARTIE III

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geq 1$.

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.

$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

$\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n.

Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \cdots, n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

1. Pour k et i éléments de $\{0, 1, \cdots, n\}$, calculer $P_k(x_i)$.

2. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est un système libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire ?

3. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P_k$.

4. Pour m élément de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on pose $S_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$. Calculer S_m.

Les questions 5 et 6 qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

5. Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P_k$:

   a. Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles.

   b. On pose $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$. Exprimer S_{n+1} en fonction de n et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$

6. Dans cette question, Q est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal à n.

On suppose de plus que $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sont des entiers relatifs vérifiant $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n$. Pour k élément de $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$, on note $y_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)$:

   a. Prouver que $| y_k | \geq k!(n-k)!$

   b. Déduire de la question 3 que $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$

   c. Soit $M = \max_{0\leq k\leq n} | Q(x_k) |$. Démontrer que $M \geq \frac{n!}{2^n}$

PARTIE IV

On note :

- A : une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes.
- I_n : la matrice identité carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.

On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que la matrice A est diagonalisable et inversible.

1. Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.
2. Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.
3. Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.
4. En déduire, en citant le théorème utilisé, que la matrice M_A est diagonalisable.

•• FIN ••