Épreuve de Mathématiques

Date: 13/07/2022

Durée: 3h

Consignes générales: à lire très attentivement

1. **L'usage de téléphone portable ou de calculatrice est strictement interdit.**
2. **L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple (QCM).**
3. **Cette épreuve comporte quatre parties indépendantes. Chaque partie comporte 5 questions indépendantes, donc au total l'épreuve comporte 20 questions. Les questions sont numérotées de 1 à 20. L'épreuve comporte 5 pages.**
4. **Certaines questions peuvent avoir plusieurs réponses. Ces réponses sont numérotées de a) à d).**
5. **A chaque question numérotée entre 1 et 20, correspond sur la feuille de réponse, une ligne de cases qu'il faut cocher, et qui porte le même numéro. Chaque ligne comporte 4 cases a), b), c) et d).**
6. **Dans la feuille de réponse, mettez un x dans les cellules correspondant aux bonnes réponses relatives aux questions 1 à 20.**

Partie 1

Question 1 : Quelles sont les assertions vraies ?

a) $\frac{1}{7} = 0,142142142\cdots$

b) Le nombre dont l'écriture décimale est $0,090909\cdots$ est un nombre rationnel.

c) $9,99999\cdots = 10$

d) $\frac{1}{5} = 0,202020\cdots$

Question 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = sin(x)/x$. L'étude de cette fonction montre que

a) f est continue en 0 et sa limite vaut 1.

b) f n'est pas continue en 0.

c) f est prolongeable par continuité en 0.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. L'étude de cette fonction montre que

a) f est continue en $(0,0)$ et sa limite vaut $1/2$.

b) f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ et sa limite vaut 0.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 4 : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120.$$

L'étude de cette fonction montre que

a) f admet un minimum global au point (6,3).

b) f admet un maximum local au point (6,3).

c) f n'a pas de maximum global.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 5 : Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui impliquent que f est continue en x_0 ?

a) $f(x)^2 \to f(x_0)^2$ (lorsque $x \to x_0$).

b) $f(x)^3 \to f(x_0)^3$ (lorsque $x \to x_0$).

c) $E(f(x)) \to E(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$), avec $E(\cdot)$ est la fonction partie entière.

d) $exp(f(x)) \to exp(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$).

Partie 2

Question 6 : On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 7\ 8 - x < y < x+1\}$. $\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$ vaut

a) $\frac{ln(2)}{2}$.

b) $\frac{3}{2}ln(2)$.

c) $\frac{1}{2}ln(\frac{8}{15}) + \frac{7}{16}$.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 7 : Soit I l'intégrale de Gauss définie par

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

Après calcul, on peut déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

a) $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

c) $I = \sqrt{\pi}$.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 8 : Soit $u_n = \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|$

a) La suite (u_n) est monotone.

b) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

c) La suite (u_n) est divergente.

d) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Question 9 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

a) croissante.

b) décroissante.

c) convergente vers 0.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 10 : On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1.$$

La fonction f est

a) surjective et non injective.

b) injective et non surjective.

c) bijective.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Partie 3

Question 11 : Soit $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Soit $B(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$.
Soit $C(X) = A(X) \times B(X) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$. Quelles sont les assertions vraies ?

a) $c_k = a_k b_k$.

b) $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_i$.

c) $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

d) $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Question 12 : On considère les fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)\cos(x)$$

et E l'espace engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

a) $\{f_1, f_3\}$ est une base de E.

b) $\{f_1, f_2\}$ est une base de E.

c) $dim E = 2$.

d) $dim E = 3$.

Question 13 : On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 + f + Id = 0$, où Id est l'application identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

a) $dim ker f = 1$.

b) f est injective.

c) f est bijective et $f^{-1} = f^2$.

d) f est bijective et $f^{-1} = -f - Id$.

Question 14 : Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M - M^t \end{aligned}$$

M^t est la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

a) f est une application linéaire, symétrique.

b) $dim\, ker f = 3$.

c) $dim\, Im f = 2$.

d) $dim\, Im f = 3$.

Question 15 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = A - aI$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

a) $N^k = 0$, pour tout entier $k \geqslant 3$.

b) On ne peut pas appliquer la formule du binôme pour le calcul de A^n. (La formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$)

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = a^n I + na^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2$.

d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Partie 4

Question 16 : On considère la série statistique double suivante

x_i	2	5	6	10	12
y_i	83	70	70	54	49

La droite de régression linéaire de la série statistique (x_i, y_i) obtenue par la méthode des moindres carrés est

a) $Y = -X + 72,2$.

b) Croissante.

c) $Y = -3,4X + 89$.

d) La même que la droite obtenue par la méthode d'interpolation de Lagrange.

Question 17 : Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte. Il existe une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n donnée par

a) $p_{n+1} = (p-1)p_n + (1-p)$.

b) $p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$.

c) $p_{n+1} = p_n + (1-p)$.

d) $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$.

Question 18 : La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x(t) = \frac{t}{4-t^2} \text{ et } y(t) = \frac{t^2}{2-t}.$$

a) Γ admet un seul point stationnaire.

b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote quand t tend vers -2.

c) La droite d'équation $y = 8x - 3$ est une asymptote quand t tend vers 2.

d) Le point de coordonnées $(\frac{1}{3}, 2)$ est un point double.

Question 19 : On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y\tan(x) = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Parmi les affirmations suivantes, choisir celles qui sont vraies :

a) La solution générale de l'équation homogène est $y = \frac{k}{\cos(x)}, k \in \mathbb{R}$.

b) Si $y = \frac{k(x)}{\cos(x)}$ est une solution de (E), alors $k'(x) = \cos(x)$.

c) La solution générale de (E) est $y = \frac{k}{\cos(x)} + \sin(x), k \in \mathbb{R}$.

d) (E) possède une solution qui se prolonge par continuité en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.

Question 20 : Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Si on note la population donnée par Ω, et on la munit de la mesure uniforme $\mathbb{P}$. On note M l'ensemble des personnes malades, et T l'ensemble des personnes dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

a) $\mathbb{P}(M|T) = 0,99$.

b) $\mathbb{P}(M|T) = \frac{1}{3}$.

c) $\mathbb{P}(M|T) = \frac{2}{3}$.

d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.