Problème ;

Partie I

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'intégrale de Gauss définie par

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x \geq 0$.

   On pose alors pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} dt.$
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que $f(0) = \pi$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
6. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. On pose $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$. Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle

$$y' - y = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}. \tag{1}$$

8. Résoudre l'équation différentielle (1). (On donnera une solution particulière sous forme intégrale.)
9. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} f(x) = \pi - \alpha \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$
10. Déterminer alors la valeur de α.
11. En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
5. Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente et calculer sa somme.
6. Montrer que la série $\sum I_n$ est divergente.
7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n+1}\, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\dfrac{t^2}{n+1}\right)^{n+1}}.$$

10. Pour $t > 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $x \longmapsto x \ln\left(1+\dfrac{t^2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

12. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}\, I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13. En déduire la formule de Wallis

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Partie III

Pour tout entier non nul n, on pose

$$u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n - \ln(n!).$$

1. Montrer que

$$u_n - u_{n-1} \sim \frac{1}{12n^2} \tag{3}$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

   On note l sa limite.

3. Montrer que $n! \sim e^{-l} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

4. En utilisant la formule (2), montrer que $l = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

5. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{4}$$

6. En remarquant que $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ et en utilisant l'équivalence donnée par la formule (3), montrer que

$$\ln(\sqrt{2\pi}) + u_n \sim -\frac{1}{12n}.$$

7. En déduire la formule asymptotique

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice : Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel égal à $\mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = id_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$. On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ l'espace des matrices d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p avec $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe $a \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes

— $f^p(a) = a$;

— La famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E ;

— La famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

Dans ce cas la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est appelée un cycle de f.

Dans cet exercice, on considère l'endomorphisme f de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
   (b) Calculer $f^3(e_1)$ et en déduire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que $f^4 = id_E$. (On ne demande pas de calculer A^4)
   (d) En déduire que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de f.
   (b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner un vecteur non nul w tel que $f(w) = iw$. (On notera $w = w_1 + iw_2$, avec w_1 et w_2 deux vecteurs à coefficients réels.)
   (c) Calculer $f(w_1)$ et $f(w_2)$ et en déduire une base $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que la base $\mathcal{B}_1$ est orthogonale par rapport à φ.
   (b) Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}_1$ en fonction de $\varphi(v_1, v_1)$ et $\varphi(v_2, v_2)$.
   (c) Donner [illegible] ondition nécessaire et suffisante pour que φ soit définie positive.
   (d) On suppose que φ est définie positive. Si on se donne un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ de matrice M relativement à la base $\mathcal{B}_1$, donner la matrice de l'endomorphisme adjoint de g relativement à la base $\mathcal{B}_1$.