المملكة المغربية
Royaume du Maroc

Ecole Hassania des Travaux Publics — المدرسة الحسنية للأشغال العمومية

CONCOURS D'ACCES EN 1ère ANNEE POUR LES TITULAIRES DU DEUG EN SCIENCES OU EQUIVALENT

EDITION 2017

EHTP

EPREUVE DE PHYSIQUE

Durée 3h

Jeudi 06 Juillet 2017

Cette épreuve comporte trois exercices complètement indépendants.
Ces exercices peuvent être traités dans un ordre quèlconque.
L'énoncé est sur 3 pages.
L'usage de calculatrice est autorisé.

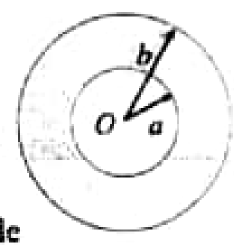
I) Optique Lentilles minces

On considère une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f_1' = 20cm$ de centre optique O_1.

1) Cette lentille utilisée dans les conditions de Gauss, pour former l'image d'un objet lumineux AB perpendiculaire à l'axe et situé à $30cm$ de la lentille.
   a) Faites une construction des trajets des rayons qui donnent de AB une image A'B'. Préciser l'échelle choisie.
   b) Quelle est la nature de l'image ? Est-elle droite ou renversée ?
   c) Calculer à l'aide de la formule de conjugaison. la position de l'image.
   d) Où doit-on placer l'écran pour avoir l'image A'B' nette ?
   e) Calculer le grandissement transversal.

2) On associe à L_1 une deuxième lentille mince L_2 de distance focale f_2' inconnue et de centre optique O_2 tel que $\overline{O_1O_2} = 40cm$. L'objet AB est toujours à $30cm$ de L_1 l'image A"B" formée par le système des deux lentilles, est nette lorsque l'écran est situé à $40cm$ de O_2.
   a) A l'aide des formules de conjugaison des lentilles minces et des résultats de la question 1). calculer la distance focale f_2'.
   b) Quelle est la nature de la lentille L_2 ? Justifier.

II) Electrostatique Champ et potentiel



Soit une répartition volumique de charges positives uniforme dans l'espace compris entre deux sphères de même centre O, de rayons a et b ($a < b$). La densité volumique est ρ. La permittivité électrique du milieu est ε_0.

1) a) Préciser le système de coordonnées adapté à l'étude électrostatique de cet ensemble de charges.
   b) Préciser la base de projection associée à ce système de coordonnées.
2) A l'aide des propriétés de symétrie, donner la forme du champ électrostatique $\vec{E}(M)$.
3) A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace à la distance r de O.

4) a) Donner la relation entre $\vec{E}(M)$ et et le potentiel électrostatique $V(M)$.

b) En déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r \geq b$. On choisit l'origine des potentiels loin des charges. $V(\infty) = 0$.

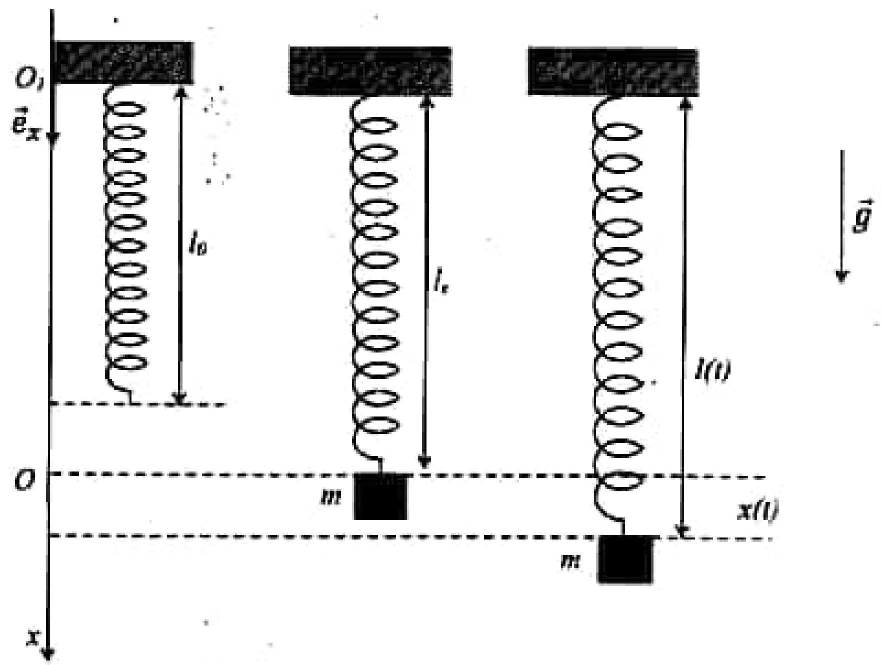
III) Mécanique : Etude d'un oscillateur

On se propose d'étudier l'équilibre puis les oscillations d'un système masse - ressort.

La masse m supposée ponctuelle est accrochée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k, de longueur à vide l_0, de masse négligeable et d'élasticité parfaite dont l'autre extrémité est fixée sur un support au niveau de O_1 qui est fixe dans un référentiel supposé galiléen caractérisé par l'axe Ox.

On suppose que la masse ne peut se déplacer que verticalement.

La position de l'extrémité inférieure du ressort, donc de la masse m est repérée par rapport à l'axe vertical descendant $(O, \vec{e}_x)$.



A) Etude de l'équilibre

1) Préciser et exprimer les forces qui s'exercent sur la masse m dans le cas où O_1 est fixe dans un référentiel galiléen.

2) Etablir la condition d'équilibre dans ce référentiel et exprimer la longueur l_e du ressort à l'équilibre.

Application numérique : On donne $l_0 = 20cm$, $m = 100g$, $g = 10\ ms^{-2}$. la longueur du ressort à l'équilibre $l_e = 30cm$.

3) Calculer la constante de raideur k et préciser son unité.

Dans la suite on choisira O dans cette position d'équilibre.

B) Etude des oscillations libres

A $t = 0$. la masse est écartée de sa position d'équilibre d'une distance $a > 0$ et est lâchée sans vitesse initiale. $a = 5cm$

On désigne :

Par X la variable qui repère la position instantanée, notée M de la masse m par rapport à O_1. $X = \overline{O_1M}$ et par x la variable qui repère la position instantanée de m par rapport à sa position d'équilibre notée O. $x = \overline{OM}$.

On néglige tous les frottements. Le support est fixe dans le référentiel galiléen. Les spires du ressort ne se touchent pas.

4) Établir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $x(t)$.

5) Montrer que le système étudié est un oscillateur harmonique dont on donnera sa pulsation propre ω_0 et sa période propre T_0 en fonction de k et m.

6) Écrire la solution générale $x(t)$ de l'équation et déterminer les constantes compte-tenu des conditions initiales.
En déduire l'expression de $X(t)$.

7) Calculer les valeurs des caractéristiques de l'oscillateur (pulsation propre ω_0 . période propre T_0, amplitude, phase).

8) Tracer le graphe de $x(t)$.

L'énergie potentielle est choisie nulle à la position d'équilibre.

9) Dans le référentiel d'étude, l'énergie mécanique E de l'oscillateur varie-t-elle au cours du mouvement ? Justifier.

10) Exprimer l'énergie E à un instant t, en fonction de l'élongation $x(t)$ et de la vitesse $\dot{x}(t)$.

11) Calculer la valeur numérique de l'énergie E du système.

المملكة المغربية
Royaume du Maroc

Ecole Hassania des Travaux Publics

المدرسة الحسنية للأشغال العمومية

CONCOURS D'ACCES EN 1ère ANNEE
POUR LES TITULAIRES DU
DEUG EN SCIENCES OU EQUIVALENT
EDITION 2017

EHTP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h

Jeudi 06 Juillet 2017

Exercice 1 :
Pour $b \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(b) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^b}, \quad S_0(b) = 0.$$

1) Pour quels $b \in \mathbb{R}$ la suite $(S_n(b))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

Pour $a > 0$, on pose $u_n(a,b) := a^{S_n(b)}$.

2) Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la suite $(u_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que si $b \geq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^b} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^b} \leq \frac{1}{k^b}.$$

4) En déduire que si $b \geq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(b) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^b} \leq S_n(b) - \frac{1}{n^b},$$

et que $S_n(b) = \int_1^n \frac{dt}{t^b} + O(1)$ quand $n \to \infty$.

5) Si $\alpha_n = \underset{n\infty}{O}(1)$, montrer que $\exists m, M > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} : m \leq e^{\alpha_n} \leq M$.

6) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante sur $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ pour que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(a,b)$ converge.

Exercice 2 :
Soit E un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{K})$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ stable par dérivation, i.e. $\forall f \in E,\ f' \in E$.
1) Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
2) On pose $D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longrightarrow & f' \end{array}$.
Montrer que D est bien définie et que $D \in \mathcal{L}(E)$.
3) Montrer que $\exists P \in \mathbb{K}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(D) = 0$.
4) Montrer que E est exactement l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre $n = \dim(E)$.

7) Pour $x \in \mathcal{A}$, montrer que N_x admet toujours un minorant noté d_x, et que $d_x \in \mathbb{N}^*$.
8) Montrer que $\forall x \in \mathcal{A}$, $\exists! \pi_x \in I_x$ unitaire tel que $\deg(\pi_x) = d_x$.
9) Montrer que $I_x = \pi_x \mathbb{R}[X] = \{\pi_x P : P \in \mathbb{R}[X]\}$.
10) Quels sont les ploynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
11) En factorisant π_x comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire à partir de l'équation $\pi_x(x) = 0$ que $d_x \in \{1, 2\}$.
12) Montrer que $\forall x \in \mathcal{A} : d_x = 1$ ssi $x \in \mathrm{vect}(1_{\mathcal{A}})$, et donner l'expression de π_y pour $y = \lambda 1_{\mathcal{A}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
13) Montrer que $x \in \mathcal{A} \backslash \mathrm{vect}(1_{\mathcal{A}})$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$ et $\pi_x(X) = X^2 + aX + b$.
14) Pour quels $x \in \mathcal{A}$, $\pi_x(0) = 0$? En déduire que tout élément non nul de $\mathcal{A}$ admet un inverse dans $\mathcal{A}$. Que peut-on déduire concernant la structure $(\mathcal{A}, +, \times)$?

15) Pour B anneau commutatif intègre, on note $J_B := \{x \in B : x^2 + 1_B = 0\}$. Quelles sont les valeurs possibles du cardinal de J_B ? Donner des exemples d'anneaux B pour chaque valeur.
16) Si $\dim(\mathcal{A}) = 1$, quel est le cardinal de $J_{\mathcal{A}}$? Dans ce cas, à quelle algèbre usuelle $\mathcal{A}$ est-elle isomorphe ?

Dans la suite, nous supposerons que $\dim(\mathcal{A}) \geq 2$.
17) En étudiant la forme canonique de π_a pour un $a \in \mathcal{A} \backslash \mathrm{vect}(1_{\mathcal{A}})$, montrez qu'il existe $\mathrm{j} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{j}^2 = -1_{\mathcal{A}}$.
En déduire que $J_{\mathcal{A}} = \{\mathrm{j}, -\mathrm{j}\}$.
18) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{A} \backslash \mathrm{vect}(1_{\mathcal{A}})$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = a 1_{\mathcal{A}} + b\mathrm{j}$.
Indication : utiliser les questions 13) et 17).
19) Déduire que $\mathcal{A} = \mathrm{vect}(1_{\mathcal{A}}, \mathrm{j})$. Conclure en répertoriant, à isomorphisme près, toutes les $\mathbb{R}$-algèbres unitaires intègres commutatives de dimension finie.

Soit K un sur-corps de $\mathbb{R}$. On écrit par abus $\mathbb{R} \subset K$.
20) Vérifier que $(K, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, où le produit externe $\lambda \cdot x := \lambda \times x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in K$.
21) Quels sont, à isomorphisme près, tous les sur-corps commutatifs de $\mathbb{R}$ de dimension finie ?
22) Donner un exemple de sur-corps de $\mathbb{R}$ de dimension n finie, avec $n \geq 3$.

***** Fin de l'épreuve *****

Exercice 3 :
1) Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, alors :
$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs propres de u dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes.
Montrer que $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

3) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \end{array}$.

Montrer que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est libre.

4) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $g_\alpha : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$.

Montrer que $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est libre.

Problème :
L'objectif de ce problème sera l'étude des $\mathbf{R}$-algèbres unitaires commutatives intègres de dimension finie.
1) Donner un exemple de $\mathbf{R}$-algèbre unitaire commutative intègre de dimension finie.
2) L'algèbre donnée dans la réponse précédente est-elle un corps ?
3) Donner un exemple de $\mathbf{R}$-algèbre unitaire commutative intègre qui ne soit pas un corps. Est-elle de dimension finie ?
4) Donner un exemple d'un sur-corps commutatif de $\mathbf{R}$ de dimension finie et un autre de dimension infinie.
On rappelle que K est un sur-corps de K_0 s'il existe un morphisme de corps injectif $\phi : K_0 \longrightarrow K$. Dans ce cas, on confond K_0 et $\phi(K_0)$ pour écrire $K_0 \subset K$.

Soit $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbf{R}$-algèbre unitaire commutative intègre de dimension finie.
5) Pour $x \in \mathcal{A}$, en étudiant la famille $(x^k)_{k\in\mathbf{N}}$, montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) = 0$.
On rappelle que si $Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_d X^d \in \mathbf{R}[X]$, et $a \in \mathcal{A}$, $Q(a) := \alpha_0 1_{\mathcal{A}} + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_d a^d$.

Pour $x \in \mathcal{A}$, on pose $I_x := \{P \in \mathbf{R}[X] : P(x) = 0\}$,
et $N_x := \{\deg(P) : P \in I_x \setminus \{0\}\}$.
6) Montrer que $\forall x \in \mathcal{A}$, I_x est un idéal de $\mathbf{R}[X]$ non réduit à $\{0\}$.