ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

- Epreuve de Mathématiques
- Durée 4H

Lundi 5 Juillet 2004

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Préambule

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé .
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés , à condition de le mentionner explicitement .
Les résultats devront être soulignés ou encadrés .
Pour chaque question de ces problèmes , on appellera * *solution convenable* * toute suite finie d'affirmations correctement justifiées , et très lisiblement écrites . Seules les * *solutions convenables* * seront notées positivement .
Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle .

Premier problème

Partie I :un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{Arctan}x$ et pour $x > 0$, on pose $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2\text{Arctan}t\,dt$.

1. Etudier la fonction f et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de f par rapport à celles-ci).

2. Calculer $g(x)$ pour $x \neq 0$ et montrer que g peut être prolongée par continuité en 0. (On continue à appeler g la fonction ainsi prolongée).
Vérifier que g est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ que l'on précisera et donner ce développement. Prouver que g est indéfiniment dérivable (c'est à dire de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier la fonction g et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de g par rapport à celles-ci).

Partie II

Dans toute la suite du problème, on désigne par $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et par α un réel tel que $\alpha > 0$.
Pour tout f de E, on désigne par $\Phi_\alpha(f)$ l'application g de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(0) = \frac{f(0)}{\alpha} \quad \text{et pour } x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

4. (a) Vérifier que pour tout élément f de E, $g = \Phi_\alpha(f)$ est élément de E.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\Phi_\alpha(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1} f(xu)\,du$.

   (c) On suppose f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et calculer g' en fonction de $\Phi_{\alpha+1}(f')$.
   Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ si f l'est.

5. (a) Montrer que Φ_α est un endomorphisme injectif de E.

   (b) Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point $x > 0$ e exprimant $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de Φ_α, en précisant les différents sous-espaces propres (o pourra former une équation différentielle vérifiée par f fonction propre associée à ur valeur propre).

   (d) Montrer que Φ_α n'est pas surjective

6. Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et une suite réelle (a_n) tels que pour tout $x \in [0, R[$; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(b_n)_n$ (qu l'on explicitera) telle que pour tout $x \in [0, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

---

7. Dans cette question seulement, on pose $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$.

   (a) En prenant $R = 1$, expliciter les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ correspondantes à la situation de la question 6.

   (b) Montrer que g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + \alpha y = \dfrac{1}{1+x}$, g étant la seule solution à avoir une limite finie en 0.

   (c) Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa limite en $+\infty$. (On pourra distinguer les cas $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$ en cherchant à majorer simplement $g(x)$ pour $x > 0$)

   (d) Déterminer une relation entre $\Phi_\alpha(f)$ et $\Phi_{\alpha+1}(f)$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} x\Phi_{\alpha+1}(f)(x)$.

8. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = e^{-t}$ et on note $g = \Phi_\alpha(f)$. Exprimer $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha g(x)$ en utilisant une factorielle et en déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9. Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$

   (a) Soit f dans E. Grâce à une intégration par parties que l'on précisera, montrer que :

   $$(\alpha - \beta)\Phi_\alpha(\Phi_\beta(f)) = \Phi_\beta(f) - \Phi_\alpha(f)$$

   (b) En déduire que les endomorphismes Φ_α et Φ_β commutent.

10. Soit un entier naturel n. On désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

    (a) Montrer que si f est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi_\alpha(f)$ l'est aussi.

    (b) Vérifier que la restriction de Φ_α à $\mathcal{P}_n$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{P}_n$.

    (c) On suppose $n = 2$. Déterminer le nombre d'endomorphismes θ de $\mathcal{P}_2$ tels que $\theta^2 = \Phi_\alpha$.

11. Soit f un élément de E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose que f tend vers le réel L en $+\infty$. Montrer que g admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on calculera en fonction de L.

Tournez la page S.V.P.

Partie III

Dans cette partie, $\alpha = 1$ et l'on notera simplement $\Phi = \Phi_1$; c'est à dire si f est élément de E, $g = \Phi(f)$ est définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

12. Soit f dans E et $g = \Phi(f)$. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors g admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on précisera. La réciproque est-elle vraie ?

13. (a) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$ et T un réel strictement positif. On suppose que f admet pour période T. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$ en fonction de $\displaystyle\int_0^T f(t)dt$. (on pourra commencer par calculer $g(nT)$ avec n entier naturel non nul).

    (b) Déterminer en fonction de x un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^x |\sin t|dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

14. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

    (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel et que l'application :

$$\mathcal{N} : f \to \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dx}$$

    est une norme sur $\mathcal{E}$.

    (b) Soit $f \in \mathcal{E}$ et $g = \Phi(f)$. Grâce à une intégration par parties, justifier que pour tous ε, A tels que $0 < \varepsilon < A$, on a :

$$\int_\varepsilon^A (g(x))^2\, dx \le \frac{1}{\varepsilon}(\int_0^\varepsilon f(t)\, dt)^2 + 2|\int_\varepsilon^A g(t)f(t)dt\,| \quad .$$

    (c) En déduire que pour tout f de $\mathcal{E}$, $\Phi(f)$ est aussi élément de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{N}(\Phi(f)) \le 2\mathcal{N}(f)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

PROBLÈME - II

Partie A

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E. On désigne par e_k ($0 \leqslant k \leqslant 5$) les éléments de la base canonique de E de sorte que $e_k(X) = X^k$. On nommera pareillement "base canonique" de E_1 (resp. de E_2) la base $\{e_1, e_3, e_5\}$ (resp. $\{e_0, e_2, e_4\}$) de E_1 (resp. E_2).

1° Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.

2° a) Montrer que l'application σ qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par

$$\sigma(P)(X) = (X^2+1)\,P''(X) - X\,P'(X) \tag{1}$$

définit un endomorphisme de E_2.

b) Donner la matrice de σ dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de E_2.

c) Déterminer le noyau de σ, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) σ est-il diagonalisable ?

3° a) Montrer que l'application s qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $s(P)$ défini par

$$s(P)(X) = (X^2 - 1)\, P''(X) + X\, P'(X) \tag{2}$$

définit un endomorphisme de E_2.

b) Donner la matrice de s dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de E_2.

c) Déterminer le noyau de s, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) s est-il diagonalisable ?

4° On considère l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $2X\, P(X) - P'(X)$.

a) Montrer que la restriction f de cette application au sous-espace E_2 définit une application linéaire de E_2 dans E_1.

b) Déterminer la matrice de cette application dans les bases canoniques respectives de E_2 et E_1.

c) Montrer que f est un isomorphisme.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non nécessairement de dimension finie. On désigne par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, de sorte que $E = E_1 \oplus E_2$. On désigne par s un endomorphisme de E_2 et par f une application linéaire bijective de E_2 dans E_1.
À $x \in E$ s'écrivant $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on associe

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2)\,. \tag{3}$$

1° a) Prouver que F est injective.

b) Prouver que F est surjective (on ne suppose PAS que E est de dimension finie) et exprimer $F^{-1}(y)$, où $y = y_1 + y_2 \in E$ et $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$,

2° a) On suppose que F admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé, décomposé en $x = x_1 + x_2$ (où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$). Prouver que x_1 et x_2 sont non nuls et que x_2 est vecteur propre de s.

b) Réciproquement, on suppose que s admet une valeur propre réelle μ. Prouver que F admet au moins une valeur propre réelle λ. Déterminer un vecteur propre de F associé à λ en fonction d'un vecteur propre x_2 de s associé à μ.

c) Montrer que si $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs propres de s indépendants et associés à une même valeur propre μ de s, alors les vecteurs propres de F précédemment calculés sont indépendants.

On suppose désormais E de dimension finie, et on pose $n = \dim E_1$.

3° a) Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ et $\dim E = 2n$.

b) Soit $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres réelles distinctes de s. Prouver que F admet $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

c) Montrer que si s est diagonalisable, F l'est aussi.

::::::::::::FIN ::::::::::::